MÜHENDİS BEYİNLER

AKIŞKANLAR MEKANİĞİ
ÖZET VE FORMÜL KİTAPÇIĞI

DÜZENLEYEN

MAK.MÜH. FURKAN GÜMÜŞ

AKIŞKANLAR MEKANİĞİ

1.1. Giriş

Akışkanlar Mekaniği, durgun ve hareket halindeki akışkanların davranışını, akışkanların diğer akışkanlar ve katılar ile oluşturdukları sınırlardaki etkileşimleri inceler.

- Kayma Gerilmesi Katılarda Şekil Değiştirme ile orantılıdır.
- Kayma Gerilmesi Sıvılarda Şekil Değiştirme Hızı ile orantılıdır. Yani akışkanlar, kayma gerilmesiyle hareket ederler ve şekil değiştirirler.

$(\quad \tau \sim \theta \qquad \tau \sim \frac{d\theta}{dt} \quad)$

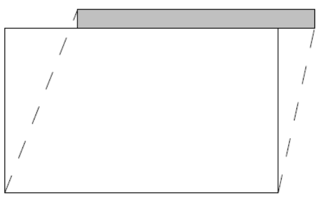
- Sonuç olarak durgun (ya da duran) akışlarda Normal Gerilme Basınçtır, Kayma Gerilmesi ise yoktur yani sıfırdır. (Hidrostatik Gerilme Durumu).
- Gazlar, bulunduğu hacmin katı yüzeyleri ile çevrili değilse hidrostatiktir.

1.2. Akışkanların Sınıflandırılması

A. *Viskoz Ve Viskoz Olmayan Akışlar*

VİZKOZİTE: Sıvıların sürtünme kuvvetidir. Akışkan cismin yüzeyine yapışarak, akışkan tabakaları arasındaki viskoz kuvvetler etkisiyle hemen üstündeki tabakayı yavaşlatır ve bu etkileşim yüzeyden uzaklaştıkça azalır. Akışkanın yüzeye yakın bölgelerde oluşturduğu akış bölgesine sınır tabaka denir. Yüzeydeki bölgede hız sınır tabakasının viskozitesinden dolayı sıfırdır. Bu olaya Kaymama Koşulu denir ve tüm sürtünmeli akışkanların karakteristik bir özelliğidir.

Başka bir ifade ile akışlar kayma gerilmesi altında şekil değiştirirler ve hızlanırlar. Kayma gerilmesi altındaki akışkana μ *vizkozite katsayısı* ile ters orantılı bir şekil değiştirme hızında hareket etmeye başlar.



Burada,

$\delta\theta$ → Kayma Şekil Değiştirmesi

δu → Hız (u = v)

δt → Zaman

μ → Vizkozite Katsayısı

Olduğuna göre şekilden hareketle $\tan \delta\theta = \frac{\delta u . \delta t}{\delta y}$ bağıntısı yazılabilir. Sonsuz küçük değişimler düşünülerek limit alınırsa;

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{du}{dy} \rightarrow \text{Şekil Değiştirme Hızı}$$

Bulunur. Daha genel ifade ile

$$\boxed{\tau = \mu \frac{d\theta}{dt} = \mu \frac{du}{dy}}$$

Newton Tipi Akışkan: Yukardaki denkleme göre doğrusal karakterdeki akışlara Newton tipi akış denir. (Su ve hava gibi)
Newton Tipi Olmayan Akışkanlar: Kan, Sıvı Plastik gibidir.

Akışkanların sürtünme etkileri önemlidir. Çepere yakın bir sınır tabakası ile bu etkilerin ihmal edilebildiği (Basitleştirilmiş Euler ve Bernoulli Denklemlerinin uygulanabilirliği) bir dış tabaka olmak üzere 2' ye ayrılabilirler.

Viskoz Akışa, duvara yakın bölgedeki akışta denilebilir.

İki akışkan tabakanın birbirine göre bağıl hareketi sırasında aralarında sürtünme kuvveti oluşur ve daha yavaş hareket eden tabaka, hızlı tabakayı yavaşlatmaya çalışır. Akışa karşı oluşan bu iç direnç, akışkanın iç yapışkanlığının bir ölçütü olan akışkan özelliği olan viskozite ile ölçülür.

Viskozite, Sıvılarda Moleküller arası çekim kuvvetlerinden
Gazlarda ise Moleküllerin çarpışmasından kaynaklanır.

SONUÇ OLARAK,

- τ Kayma gerilmesi etkisinde akışkan hızlanır.
- Sabit ivme ve akış yönünde basınç değişiminin (Gradyen) olmaması ($\Delta P = 0$) kayma gerilmelerinin akışkanın her yerinde sabit olduğunu gösterir.
- Basınç Gradyeni = Basınç farkı
- Sıcaklık, akışkanın iç enerji seviyesinin ölçüsüdür.
- Newton tipi akışkanların viskozitesi fiziksel bir özelliktir. Sıcaklık ve Basınç ile değişir. μ(P, T)
- Vizkozite Basıncın artmasıyla gaz ve sıvılarda çok az artar,
  Sıcaklığın artmasıyla, Gazlarda artar,
  Sıvılarda azalır.

REYNOLDS SAYISI: Newton tipi akışkanların viskoz davranışlarını belirler. Reynolds Sayısı;

$$\boxed{Re = \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{VL}{\nu}}$$

Kinematik Viskozite,

$$\boxed{\nu = \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{m^2}{s}\right] \rightarrow \text{Kinematik Viskozite}}$$

- Re, Çok küçük ise sürtünmeli akışın sürünme yaptığını,
- Re, orta değerde ise Laminer Akış,
- Re, Yüksek ise Türbülanslı akış olduğunu gösterir.

B. *İç ve Dış Akışkanlar*

Dış Akış, bir akışkanın bir plaka, bir tel ya da boru gibi bir yüzeyin üzerinden herhangi bir sınır olmaksızın akmasıdır. Topun etrafındaki akış örnek verilebilir. Dış akışlarda viskoz etkiler, sadece katı yüzeylere komşu sınır tabakalarla ve akışa göre cisimlerin arka tarafında kalan art izi bölgeleriyle sınırlı.

İç Akış, akışkan katı yüzeyler ile tamamen sınırlandırılmış yani akış bir boru ya da kanal içerisindedir. Örneğin, bir borunun içindeki su akışı iç akıştır. İç akışlar, tüm akış alanında viskozitenin etkisi altındadır.

C. *Sıkıştırılabilir Ve Sıkıştırılamaz Akışlar*

- Sıkıştırma olayı akışkanın hızıyla ilgilidir.
- Sıkıştırılabilirlik yoğunlukla ilgilidir.
- Yoğunluk akış boyunca her yerde yaklaşık sabit ise sıkıştırılamaz olduğu söylenir. Akışkan Hacmi DEĞİŞMEZ.
- Yüksek Hızlı akışkanlar sıkıştırılabilir ve bu da Mach değerine bağlıdır.

AKIŞ HIZI = Ma = $\frac{V}{C} = \frac{Akış\ Hızı}{Ses\ Hızı}$ (Mach Sayısı)

C = > Deniz seviyesi ve oda sıcaklığındaki havada 346 m/s

Ma = 1 (Sonik),

Ma < 1 (Ses Altı),

Ma>1 (Ses Üstü – Süpersonik),

Ma >> 1 (HiperSonik Hız).

Gaz, Ma < 0,3 => Yoğunluk farkı % 5'in altında oluğu için sıkıştırılamaz KABUL EDİLİR.

Yani, Hava ile ilgili Sıkıştırılabilirlik etkileri 100 m/s'nin altındaki hızlarda ihmal edilebilir. (Sıvı gibi kabul edilir.)

D. Laminer Ve Türbülanslı Akışlar

LAMİNER: Çalkantısız akışkan tabakaları ile karakterize edilen çok düzenli akışkandır. Komşu akışkan taneciklerin bir arada ince tabakalar halinde hareketinden ileri gelir.

TÜRBÜLANS: Yüksek hızlarda çalkantıları ile nitelendirilen düzensiz akışkan hareketidir.

Viskozite	Madde	Hız	Akış Türü
Yüksek Viskozite	Yağ	Düşük Hız	Laminer
Düşük Viskozite	Hava	Yüksek Hız	Türbülans

E. Doğal ve Zorlanmış Akışlar

Doğal Akış, herhangi bir akışkan hareketi, ılık (yani az yoğun) akışkanın yükselmesi ve soğuk (yani çok yoğun) akışkanın alçalması ile kendiliğinden oluşan kaldırma etkisi gibi doğal etkenle olur.

Zorlanmış Akış, pompa ya da fan gibi dış etkenler ile bir borunun içinden veya bir yüzeyin üzerinden akmaya zorlanmasıdır.

F. Daimi (sürekli) ve Daimi Olmayan Akışlar

Daimi (Sürekli) Akış: Bir noktada zaman içerisinde hiçbir değişim olmamasıdır. Türbinler, kompresörler, kazanlar örnek verilebilir. Daimi akışta, akış bölümünün kütle, hacmi ve toplam enerjisi çalışma süresince SABİT kalır.

Daimi Olmayan (Üniform) Akış: Konuma bağlı hiçbir değişim olmamasıdır.

G. Tek Boyutlu Ve Çok Boyutlu Akışlar

Akış hızının Dikey, Yatay ve Dönme şeklinde 3 yönde değişmesi ile 3 boyutlu akış olur. Silindirik Koordinatla

V (r, θ , z) Şeklinde gösterilebilir. Dönerek giden mermi üzerindeki akış 3 boyuta örnek verilebilir.

En – Boy Oranı büyük ve akışın boyut doğrultusunda fark edilebilecek kadar değişmediği durumlarda akış 2 boyutlu olarak kabul edilebilir.

1.3. Boyutlar ve Birimler

Temel olarak 4 boyut vardır. Bunlar; Kütle [M] , Uzunluk [L] , Zaman [T] ve Sıcaklık [θ] 'dir.

- Homojen Denklem: Tüm terimlerin aynı boyutlu olmasıdır. $s = s_0 + v_0.t + 0.5gt^2$ => Terimlerin hepsi [L] Boyutundadır.
- Euler Yöntemi: Akış alanı ile ilgilenir. Basıncın konumu ve zamana göre değişimini inceler P (x,y,z,t). Otoyoldaki arabaların ortalama hızlarını alıp, mesafeyi dikkate alarak zamanın bulunması gibidir. (Genel Akış Hali Bulunur)
- Langrange Yöntemi: Tek bir parçacığın izlediği yol ile ilgilenir. Otoyoldaki özel bir aracın hızı ve zamanını bulmak gibidir. (Özel ya da Tek Parçacığın Halinin Analizi)

1.4.Birimler Ve Sabitler

Standart Atmosfer Basıncı	P_{atm} = 1 atm = 101.3 kPa = 1.01 bar = 760 mm Hg
Evrensel Gaz Sabiti	R_u = 8.31 kJ/kmol. K

(20 ^{0}C ve 1 atm' deki Hava İçin);

Özgül Gaz sabiti	R_{hava} = 0.2870 kJ/kg.K
Özgül Isı Oranı	$k = C_p/C_v = 1.40$
Özgül Isılar	C_p = 1.007 kJ/kg. K C_v = 0.7200 kJ/kg. K
Ses Hızı	C = 343.2 m/s = 1236 Km/h

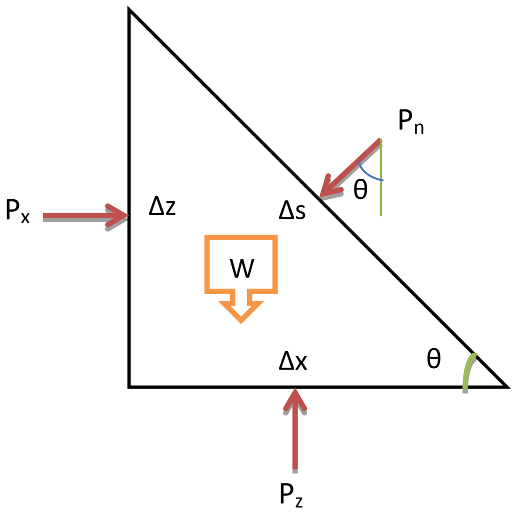
1.5.Dönüşümler

Yoğunluk	1 g/cm^3 = 1 kg/L = 1000 kg/m^3
Enerji	1 kJ = 1000 N. m = 1 kPa.m^3
Güç	1 W = 1 J/s 1 BG = 745.7 W
Kuvvet	$1 \text{ N} = 1 \frac{kg.m}{s^2}$ 1 kgf = 9.80665 N
Basınç	1 Pa = 1 N/m^2 1 kPa = 10^3 Pa
Özgül Isı	1 kJ/kg. ^{0}C = 1 kJ/kg. K = 1 J/g. ^{0}C
Dinamik Viskozite (μ)	1 kg/m. S = 1N.s/m^2 = 1 Pa. s = 10 Poise
Kinematik Viskozite (ν)	1 m^2/s =10^4 cm^2/s 1 Stoke = 1 cm^2/s = 10^{-4} m^2/s
Hacimsel Debi	1m^3/s = 60 000 L/dk = 10^6 cm^3/s
Sıcaklık	T (^{0}F) = 1.8 T (^{0}C) + 32

2.BÖLÜM: AKIŞKANLARDA BASINÇ DAĞILIMI VE STATİĞİ

2.1.Basınç ve Basınç Gradyeni (Farkı)

- Duran bir akışkanın kayma gerilmesinin olmadığını ve viskoz olmayan akışın kayma gerilmesi yaratmadığını biliyoruz. Akışkan durduğuna göre ivmesi de sıfır olmalıdır ve hem X hem de Z yönünde kuvvetlerin toplamı 0 olmalıdır. (F = ma = 0)



Şekilde kenar uzunlukları Δx, Δy, Δs ve kalınlığı b olan üçgen prizmanın duran bir akışkan elamanını temsil etmektedir. Elemanın Ağırlığı $W = \frac{1}{2}\gamma b \Delta x \Delta z$

$\Sigma F_x = ma_x = 0$; $P_x.b.\Delta z - P_n.b.\ \Delta s\ Sin\theta$

$\Sigma F_z = ma_z = 0$; $P_z.b.\Delta x - P_n.b.\ \Delta s\ Cos\theta - \frac{1}{2}\gamma b \Delta x \Delta z$

Denklem Çözülürse;

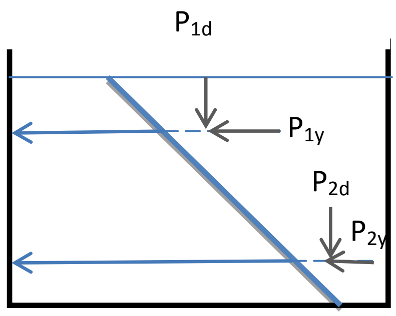
- $P_x = P_z = P_n = P$
- $P_z = P_n + \frac{1}{2}\gamma \Delta z$ olur.

Sonuç olarak Hidrostatiğin 2 Önemli İlkesi;

- Akışkan içerisinde her yönde basınç eşittir.
- Basınç yoğunluk, yerçekimi ve derinlikle değişir.

2.2.Hidrostatik Basınç Dağılımı

Basınç düşey doğrultuda değişir ancak diğer tüm yönlerde sabit kalır.



- $P_{1dik} = P_{1yüzey}$ ve $P_{2dik} = P_{2yüzey}$
- $\Delta P_{Etkin} = P_2 - P_1 = \gamma \Delta z = \rho g \Delta z$ olur.

$$\boxed{\Delta P_{Etkin} = P_2 - P_1 = -\int_1^2 \rho g dz}$$

- $P_{mutlak} = P_{atm} + \gamma \Delta z$
- $P_{mutlak} = P_{atm} + P_{vakum}$

2.3.Akışkan Elemanın Dengesi

$$\overrightarrow{df}_{\substack{yer \\ çekimi}} = -\left(\frac{\partial y}{\partial x} i + \frac{\partial y}{\partial x} j + \frac{\partial y}{\partial x} k\right) dxdydz = -\overrightarrow{\nabla P} dxdydz$$

$$\overrightarrow{df}_{\substack{yer \\ çekimi}} = \rho g dxdydz =>$$

$$\boxed{\begin{matrix} f_{\substack{yer \\ çekimi}} = \rho g \\ \nabla P = \rho(g - a) \end{matrix}}$$

$\vec{F} = m.\vec{a}$ ise,

- $\rho \vec{a} = \Sigma \vec{F} = \vec{f}_{Basınç} + \vec{f}_{Yer\ Çekimi} + \vec{f}_{Viskoz}$
- $\rho \vec{a} = -\overrightarrow{\nabla P} + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V}$ Olur.

Özel Durum;

1-) Hareketsiz veya Sabit Hızlı Akışkan: İvme ve viskoz terimleri yoktur. Basınç sadece ρ ve g ye bağlıdır.

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$

2-) Katı Cisim gibi Öteleme ve Dönme:

$$\overrightarrow{\nabla P} = \rho(\ g - a)$$

3-) Dönümsüz Hareket ($\nabla\ X\ V \equiv 0$): Viskoz terimler yok olur ve Bernoulli Denklemi çözülür.

4-) Genel Viskoz (Sürtünmeli) Akış: Diferansiyel analiz

2.4.Düzlemsel Yüzeyler Üzerindeki Hidrostatik Kuvvet

Homojen bir sıvıya tamamen daldırılan düz bir levha yüzeyi üzerinde etki eden bileşke kuvvet, yüzeyin kütle merkezindeki basınç P_C ile yüzeyin A alanının çarpımına eşittir.

$$\boxed{F_R = \left(P_0 + \rho g. I_{xy} Sin\theta\right)A = (P_0 + \rho g h_C)A = P_{Ort}\ A}$$

$$\boxed{x_B = -\frac{I_{xy}\ Sin\theta}{h_G\ A}} \qquad \boxed{y_B = -\frac{I_{xx}\ Sin\theta}{h_G\ A}}$$

2.5.Eğrisel Yüzeyler Üzerindeki Hidrostatik Kuvvetler

Bileşke basınç kuvveti yatay ve düşey bileşenlerine hesaplanarak hesaplanır.

Eğrisel yüzeydeki yatay kuvvet bileşeni: $F_H = F_X$

Eğrisel yüzeydeki düşey kuvvet bileşeni: $F_V = F_Y + W$

$$F_R = \sqrt{F_H^2 + F_V^2}$$

2.6.Katmanlı Akışlarda Hidrostatik Kuvvetler

$$F_R = \sum F_{R_i} = \sum P_{C\ i} A$$

2.7.Yüzme ve Kararlılık

$$F_K = F_{alt} - F_{üst} = \rho_a g(s + h)A - \rho_a g s A = \rho_a g V$$

2.8.Katı Cisim Gibi Hareketle Basınç Dağılımı

Sadece öteleme yapan akışkan için katı cisim davranışı;

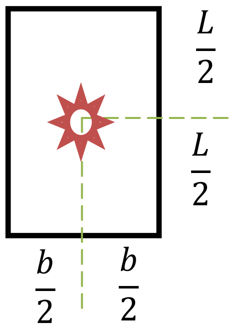
$\overrightarrow{\nabla P} = \rho(\, g - a) =>$

$$\boxed{P = -\rho a x + \rho g(\, h_0 - z\,)}$$

$$\boxed{\theta = \tan^{-1}\left(\frac{h_0 - z}{x}\right)}$$

AĞIRLIK MERKEZİNDEN GEÇEN EKSEN TAKIMINA GÖRE ATALET MOMENTLERİ

Dikdörtgen Levha;

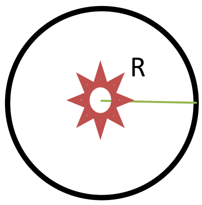


$A = bL$

$$I_{xx} = \frac{bL^3}{12}$$

$$I_{xy} = 0$$

Daire;

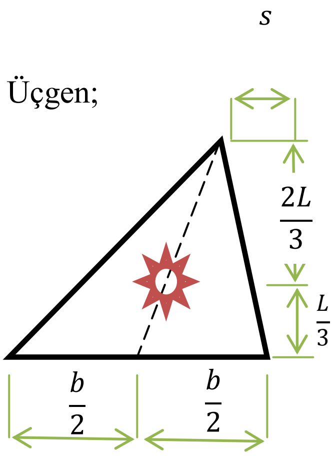


$A = \pi R^2$

$$I_{xx} = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$I_{xy} = 0$$

Üçgen;

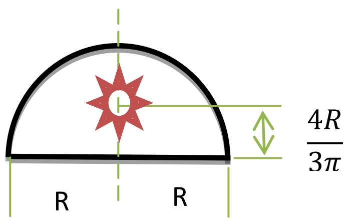


$$A = \frac{bL}{2}$$

$$I_{xx} = \frac{bL^3}{36}$$

$$I_{xy} = \frac{b(b-2s)L^2}{72}$$

Yarım Daire;



$$A = \frac{\pi R^2}{2}$$

$$I_{xx} = 0.10976$$

$$I_{xy} = 0$$

3.BÖLÜM: DENETİM BÖLGESİ İÇİN İNTEGRAL DENKLEMLERİ

3.1.Giriş

Sonlu bir bölgede giren akış ile çıkan akışın dengesini kurmak ve bir cisim üzerine etkiyen kuvvet, moment veya toplam enerji değişimi gibi genel akış etkilerinin tespiti yapılacaktır. (Kısacası denetim Hacminin Analizi) (Büyük Ölçek Analizi – İntegral Analizi)

Burada V → Hız

ϑ ya da ∀ → Hacim olacaktır.

Kütlesel Debi:

$$\dot{m} = \int_A \rho(\vec{V}.\vec{n})dA = \int_A \rho V_n dA$$

$$\dot{m} = \rho.V_{ort}.A \quad veya \quad \dot{m} = \rho\dot{\vartheta}$$

Hacimsel Debi:

$$\dot{\vartheta} = \int_A (\vec{V}.\vec{n})dA = \int_A V_n dA$$

$$\dot{\vartheta} = V_{ort}.A$$

3.2.Temel Fizik Yasaları

- Kütlenin Korunumu
- Doğrusal Momentumun Korunumu
- Açısal Momentumun Korunumu
- Enerjinin Korunumu

B: Sistemin Özelliğidir

$\beta = \frac{dB}{dm}$ Şeklindedir.

Reynolds Transport Teoremi

$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_{Sis} = \frac{d}{dt}\left(\int_{DH} \beta.\rho d\forall\right) + \int_{DY} \beta.\rho(\vec{V}.\vec{n})dA$$

3.3. Kütlenin Korunumu

B = m olmak üzere

$$\beta = \frac{dm}{dm} = 1 \quad olur.$$

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{Sis} = \frac{d}{dt}\left(\int_{DH} \rho d\forall\right) + \int_{DY} \rho(\vec{V}.\vec{n})dA = 0$$

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{Sis} = \sum_{Giren} \dot{m} - \sum_{Çıkan} \dot{m}$$

Daimi Akış İçin:

$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 \quad => \dot{m}_1 = \dot{m}_2$

Sıkıştırılamaz Akış İçin: (Yoğunluk Sabit olur)

$V_1 A_1 = V_2 A_2 \quad => \dot{\vartheta}_1 = \dot{\vartheta}_2$

3.4. Doğrusal Momentumun Korunumu

B = m. $\vec{V}$ olmak üzere

$$\beta = \frac{\vec{V}.dm}{dm} = \vec{V} \quad olur.$$

$$\frac{d(m.\vec{V})_{Sis}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int_{DH} \vec{V}\rho d\forall\right) + \int_{DY} \vec{V}\rho(\vec{V}.\vec{n})dA = \sum \vec{F}$$

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}\left(\int_{DH} V\rho d\forall\right) + \sum_{Çıkan} \dot{m}V_{ort} - \sum_{Giren} \dot{m}V_{ort}$$

3.5. Açısal Momentumun Korunumu

B = $\vec{H} = \vec{r} \times m\vec{V} =$ olmak üzere

$$\beta = \frac{dH_0}{dm} = r \times V \quad olur.$$

$$\left(\frac{dH}{dt}\right)_{Sis} = \frac{d}{dt}\left(\int_{DH} (\vec{r}\, X\, \vec{V})\rho d\forall\right) + \int_{DY} (\vec{r}\, X\, \vec{V})\rho(\vec{V}.\vec{n})dA = \sum \vec{M}$$

Daimi Üniform Akış İçin:

$$\sum \vec{M} = \frac{d}{dt}\left(\int_{DH} (\vec{r}\, X\, \vec{V})\rho d\forall\right) + \sum_{Çıkan} \dot{m}\vec{V}.\vec{r} - \sum_{Giren} \dot{m}\vec{V}.\vec{r}$$

3.6. Enerjinin Korunumu

B = E olmak üzere

$$\beta = \frac{dE}{dm} = e \quad olur.$$

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \left(\frac{dE}{dt}\right)_{Sis}$$

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{Sis} = \frac{d}{dt}\left(\int_{DH} e\rho d\forall\right) + \int_{DY} e\rho(\vec{V}.\vec{n})dA$$

$* \ e = u + \frac{1}{2}V^2 + gz$

$* \ \dot{W} = \dot{W}_{Mil} + \dot{W}_{Basınç} + \dot{W}_{Viskoz}$

$* \ u + p\vartheta = h$

Genel Enerji Denklemi

$$\dot{Q} - \dot{W}_{Mil} - \dot{W}_{viskoz} = \frac{d}{dt}\left(\int_{DH} e\rho d\forall\right) + \int_{DY} e\rho(\vec{V}.\vec{n})dA$$

Termodinamiğin 1. Yasası (Enerjinin Korunumu) şeklinde ifade edilirse aynı denklem:

$$\dot{Q}_{net}+\dot{W}_{net}=\frac{d}{dt}\left(\int_{DH} e\rho d\forall\right)+\sum_{Çıkan}\dot{m}\left(\frac{P}{\rho}+u+\frac{V^2}{2}+gz\right)-\sum_{Giren}\dot{m}\left(\frac{P}{\rho}+u+\frac{V^2}{2}+gz\right)$$

$* \frac{P}{\rho}=P\vartheta \; (sınır \; işi) => P\vartheta+u=h \; olduğundan$

$$\dot{Q}_{net}+\dot{W}_{net}=\frac{d}{dt}\left(\int_{DH} e\rho d\forall\right)+\sum_{Çıkan}\dot{m}\left(h+\frac{V^2}{2}+gz\right)-\sum_{Giren}\dot{m}\left(h+\frac{V^2}{2}+gz\right)$$

Burada:

➢ *<u>Toplam Basıncın birim zamanda yaptığı iş veya Güç:</u>*

Sadece yüzeylerde meydana gelir. Denetim yüzeyinin parçası bir makine parçasının yüzeyi ise mil işi bulunmalıdır.

$$\dot{W}_{Basınç}=\int_{DY} P(\vec{V}.\vec{n})dA$$

➢ *<u>Toplam Viskozun birim zamanda yaptığı iş:</u>*

İç iş terimleri kendi kendini yok ettiğinden viskoz (sürtünme) gerilmelerden ötürü olan kayma işi denetim yüzeyinde oluşur ve her bir viskoz gerilme (bir normal ve iki teğetsel) ile ilgili hız bileşeninin çarpımından meydana gelir.

$$\dot{W}_{Viskoz}=-\int_{DY}\tau.VdA$$

Burada τ elemansal yüzey dA üzerindeki gerilme vektörüdür. Bu terim denetim hacminin o kısmında özel tipteki yüzeye göre kaybolabilir veya ihmal edilebilir:

Katı Yüzey; Duvarlar denetim yüzeyinin bütün kısımları için, viskoz kaymama koşulunda V= 0'dır. Böylece $W_{viskoz}=0$ olur.

Makinanın Yüzeyi; Viskoz iş makine tarafından yapılır ve böylece W_m terimi içine katarız.

<u>TERMODİNAMİĞİN 1. YASASI</u>

$$Q_{net}+W_{net}-W_s=\Delta u+\frac{\Delta V^2}{2}+g\Delta h$$

$$Q_{net}+W_{net}=\Delta h+\frac{\Delta V^2}{2}+g\Delta h$$

3.7. Bernoulli Denklemleri

Bernoulli denklemleri Basınç, Hız ve Yükseklik arasındaki ilişkiyi temsil eder. Net sürtünme kuvvetleri ihmal edilir olduğu daimi ve sıkıştırılamaz akış bölgelerinde geçerlidir.

<u>Bernoulli Denklemi</u>

➢ Daimi akışta uygulanabilir.
➢ Sürtünmesiz akışta uygulanabilir.
➢ Sıkıştırılamaz akışta uygulanabilir.
➢ Akışın viskoz olmayan bölgelerine uygulanabilir.
➢ Isı geçişinin olduğu bölgelerde uygulanamaz.
➢ Mil işi gibi akım çizgilerini bozan bölgelerde uygulanamaz.

* Kısacası akım çizgisi bozulmayacak ve sürtünme-lerden dolayı akım çizgileri birbirine yakınlaşma-yacak veya uzaklaşmayacak.

Enerji Denklemi,

<u>Birim Kütle İçin:</u>

$$\dot{q}-\dot{w}_{mil}-\dot{w}_{viskoz}=h_2-h_1+\frac{V_2^2-V_1^2}{2}+g\Delta z$$

$* \; q=0 \; (ısı \; transferi \; yok)$ ve $h_f\approx 0 \; ; \; h_m=0$ (Herhangi bir iş yok) ise, Bernoulli Denklemi oluşur:

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2$$

<u>Bernoulli Denklemi</u>

Daimi Akış: $\int\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}+gz=sabit$

Daimi, sıkıştırılamaz Akış: $\frac{P_1}{\rho}+\frac{V_1^2}{2}+gz_1=\frac{P_2}{\rho}+\frac{V_2^2}{2}+gz_2$

* Denklemin tümü ρ ile çarpılırsa her terim basınç cinsinden olur:

$$P+\rho\frac{V^2}{2}+\rho gz=sbt$$

1 2 3

1-) <u>Statik Basınçtır</u>: Gerçek Termodinamik basınçtır.

2-) <u>Dinamik Basınçtır</u>: Hareket halindeki bir akışkan izentropik olarak durmaya zorlandığında akışkanda meydana gelen basınç artışıdır.

3-) <u>Hidrostatik Basınç</u>: Yükseklik ya da akışkan ağırlığının basınç üzerindeki etkisidir.

* Statik, dinamik ve hidrostatik basınçların toplamı Toplam Basınç olarak adlandırılır. Bu yüzden bir akım çizgisi boyunca toplam basınç sabit kalır.

* Statik ve dinamik basınç toplamı durma basıncını verir.

$$P_{durma}=P+\rho\frac{V^2}{2}\;[kPa]$$

4.BÖLÜM: AKIŞKAN HAREKETİNİN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ

4.1.Giriş

Akış alanının sonsuz küçük (x, y, z) noktalarını ayrıntılı olarak akış yapısının incelenmesi yapılacaktır. (Küçük Ölçek – Türev Analizi)

4.2. Akışın İvme Alanı

Kartezyen Koordinatlarda:

$$\vec{V} = u(x,y,z,t)\vec{i} + v(x,y,z,t)\vec{j} + w(x,y,z,t)\vec{k}$$

$$\vec{a}_{(x,y,z,t)} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + u\frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial\vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial\vec{V}}{\partial z}$$

$$\vec{a}_{(x,y,z,t)} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\,\vec{\nabla})\vec{V}$$

$$Gradyen\ Opertörü: \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right) = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial y}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$

4.3. Kütlenin Korunumu – Süreklilik Denklemi

$$\int_{DH} \frac{\partial\rho}{\partial t} d\forall + \int_{DY} \rho(\vec{V}.\vec{n})dA = 0 \qquad [1]$$

$$\int_{DH} \frac{\partial\rho}{\partial t} d\forall = \sum_{Giren} \dot{m} - \sum_{Çıkan} \dot{m} \qquad [2]$$

<u>Diverjans – Gauss Teoremi ile yazılırsa</u>

$$\int_{\forall} \vec{\nabla}\vec{G} d\forall = \oint_{A} (\vec{G}.\vec{n})\, dA \qquad [3]$$

Burada G herhangi bir vektör olmak üzere:

$\vec{G} = \rho\vec{V}$ Yazılabilir ve [3] te yerine konursa:

$$\int_{DH} \frac{\partial\rho}{\partial t} d\forall + \int_{DH} \vec{\nabla}(\rho\vec{V}) d\forall = 0 \qquad [4]$$

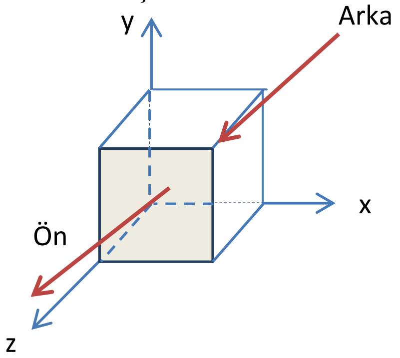
$$\int_{DH} \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho\vec{V})\right] d\forall = 0$$

Parantez içi 0 olursa sonuç sıfır olabilir ancak:

Süreklilik Denkkemi tüm akış türleri için:

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho\vec{V}) = 0 \qquad [5]}$$

* Sonsuz küçük hacim kullanılarak türetilirse:



Kartezyen Koordinatlarda Hız vektörü

$\vec{V} = (u, v, w)$ =>

$$\sum_{Çıkan} \dot{m} \cong \left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dy\,dz + \left(\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\frac{dy}{2}\right) dx\,dz + \left(\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\frac{dz}{2}\right) dx\,dy$$

$$\sum_{Giren} \dot{m} \cong \left(\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dy\,dz + \left(\rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\frac{dy}{2}\right) dx\,dz + \left(\rho w - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\frac{dz}{2}\right) dx\,dy$$

Denklemler [2] de yerine konursa

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}dxdydz = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dxdydz - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dxdydz - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}dxdydz$$

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right] = 0 \qquad [6]}$$

** ρ sabit olursa ya da sıkıştırılamaz akışkanlar için:*

KARTEZYEN KOORDİNATLARDA

$$\boxed{Süreklilik\ Denklemi: \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad [7]}$$

SİLİNDİRİK KOORDİNATLARDA

$$\boxed{Süreklilik\ Denklemi: \quad \frac{1}{r}\frac{\partial(r.u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(u_\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial(u_z)}{\partial z} = 0}$$

4.4.Diferansiyel Yapıda Doğrusal Momentumun Korunum Denklemi

$$Cauchy\ Denklemi: \frac{\partial(\rho\vec{V})}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho\vec{V}.\vec{V}) = \rho\vec{g} + \vec{\nabla}.\sigma_{ij}$$

<u>Kartezyen Koordinatlarda Navier - Stokes Denklemi</u>

* μ (dinamik viskozite) veya ν = μ/ρ (kinematik vizkozite)

<u>Sıkıştırılamaz Navier – Stokes Denkleminin x-bileşeni</u>

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

<u>Sıkıştırılamaz Navier – Stokes Denkleminin y-bileşeni</u>

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

Sıkıştırılamaz Navier – Stokes Denkleminin z-bileşeni

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial z}+\rho g_z+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

Silindirik Koordinatlarda Navier - Stokes Denklemi

Sıkıştırılamaz Navier – Stokes Denkleminin r-bileşeni

$$\rho\left(\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}-\frac{u_\theta^2}{r}+u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)$$
$$=-\frac{\partial P}{\partial r}+\rho g_r+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)-\frac{u_r}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}\right]$$

Sıkıştırılamaz Navier – Stokes Denkleminin θ-bileşeni

$$\rho\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{u_r u_\theta}{r}+u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)$$
$$=-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}+\rho g_\theta+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)-\frac{u_\theta}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}\right]$$

Sıkıştırılamaz Navier – Stokes Denkleminin z-bileşeni

$$\rho\left(\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)$$
$$=-\frac{\partial P}{\partial z}+\rho g_z+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right]$$

4.5. Navier – Stokes Denkleminin Kesin Çözümü

1-) Tam gelişmiş Couette akışı için:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\cancelto{0}{\frac{\partial v}{\partial y}}+\cancelto{0}{\frac{\partial w}{\partial z}}=0\rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=0\ olur.$$

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}+u\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}}+v\cancel{\frac{\partial u}{\partial y}}+w\cancel{\frac{\partial u}{\partial z}}\right)=-\cancel{\frac{\partial P}{\partial x}}+\rho g_x+\mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}\right)$$

Sonuç olarak → $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\ olur$. Tek değişken olduğundan adi diferansiyel formada yazılabilir.

İlk İntegral Alınırsa

$$\frac{du}{dy}=c_1$$

İkinci İntegral Alınırsa

$$u(y)=c_1+c_2$$

Sınır Şartları y = 0 için u= 0 ve y= h için u= v ise,

$$u(0)=0=c_2\qquad u(h)=v=c_1.h=>\ c_1=\frac{v}{h}\ olur.$$

$$u(h)=\frac{v}{h}.y\ \ olur.$$

2-) Boruda Poiseulle Akışı

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{P_2-P_1}{x_2-x_1}=sbt$$

Silindirik koordinatlar süreklilik denklemi

$$\frac{1}{r}\cancel{\frac{\partial(r.u_r)}{\partial r}}+\frac{1}{r}\cancel{\frac{\partial(u_\theta)}{\partial \theta}}+\frac{\partial(u_z)}{\partial z}=0\quad=>\quad\frac{du_x}{dx}=0\ olur.$$

Sıkıştırılamaz Navier – Stokes Denkleminin z-bileşeni

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial u_z}{\partial t}}+u_r\cancel{\frac{\partial u_z}{\partial r}}+\frac{u_\theta}{r}\cancel{\frac{\partial u_z}{\partial \theta}}+u_z\cancel{\frac{\partial u_z}{\partial z}}\right)$$
$$=-\frac{\partial P}{\partial z}+\cancel{\rho g_z}+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\cancel{\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2}}+\cancel{\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}}\right]$$

Veya

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)=\frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}$$

İntegral Alınırsa

$$r\frac{du}{dr}=\frac{r^2}{2\mu}\frac{dP}{dx}+c_1$$

İntegral Alınırsa

$$u=\frac{r^2}{4\mu}\frac{\partial P}{\partial x}+c_1 lnr+c_2$$

Sınır Şartları r = 0 sonuç o olmalı → $C_1 = 0$ olur.

r = R => $C_2=\frac{R^2}{4\mu}\frac{\partial P}{\partial x}$ olur.

$$Sonuç\ Olarak:\qquad u(r)=\frac{1}{4\mu}\frac{dP}{dx}(r^2-R^2)$$

4.6. Akım fonksiyonu

1-) Kartezyen koordinatlarda

Bir akış alanında her yerde anlık hız vektörüne teğet olan eğriye akım çizgisi denir. Bu çizgi akım fonksiyonu (ψ) ile temsil edilir.

Süreklilik denklemi için,

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

İki bağımlı değişken (u, v) yerine tek bir bağımlı değişken ψ cinsinden ifade etmek mümkündür.

$$u=\frac{\partial \psi}{\partial y}\qquad ve\qquad v=-\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

İfadeler yerlerine konursa:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x}=0\qquad [8]$$

* Sabit ψ eğrileri akışın akım çizgileridir.

Bir akım çizgisi boyunca $\frac{dy}{dx}=\frac{v}{u}\rightarrow -v\,dx+u\,dy\ olur$.

$$Yerine\ Konursa:\quad \frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy=0$$

2-)Silindirik Koordinatlar

(x, y) ve (u, v) yerine (r, θ) ve(u_r, u_θ) cinsinden verilen düzlemsel akıştır.

$$u_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\qquad ve\qquad u_\theta=-\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

6.BÖLÜM: BORULARDA SÜRTÜNMELİ AKIŞ

6.1.Giriş

Genellikle dairesel boru tipleri sıvılar için kullanılırken, dikdörtgen (kanal tipi) yapılar gaz akışkanlar için tercih edilir.

- Akışta sürtünmenin sonucu olarak basınç düşmesi yaşanır.
- Laminerden türbülanslı akışa geçiş geometriye, yüzey pürüzlülüğüne, akış hızı, yüzey sıcaklığı, akışkan türü, boru titreşimleri ve daha birçok özelliğe bağlıdır.

6.2.Reynolds Sayısı Rejimleri

$$R_e = \frac{Atalet\ Kuvvetleri}{Viskoz\ Kuvvetler} = \frac{V_{ort}.D}{\nu} = \frac{\rho.V_{ort}.D}{\mu}$$

Burada D , Geometrinin karakteristik değeridir. (çap yada uzunluk)

Laminer akışın türbülanslı olmaya başladığı geçiş sınırına kritik reynolds sayısı Re_{Kr} denir.

- Dairesel borularda iç akış için $Re_{Kr} = 2300$ alınabilir.

$0 < Re < 1$: Çok sürtünmeli laminer "sürünme hareketi"

$1 < Re < 1$: Laminer, Reynolds şiddetli bağımlılık

$100 < Re < 10^3$: Laminer, sınır tabaka teorisi faydalı

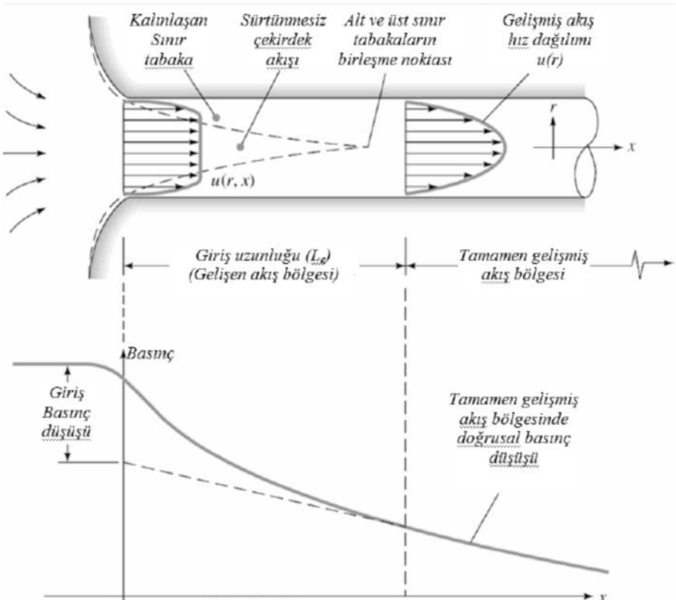
$10^3 < Re < 10^4$: Türbülansa geçiş

$10^4 < Re < 10^6$: Türbülanslı, orta derece Re bağımlılık

$10^6 < Re < \infty$: Türbülanslı, az derece Re bağımlılık

6.3.İç ve Dış Sürtünmeli Akışlar

Akışkanın viskozitesinin neden olduğu viskoz kayma kuvvetlerinin etkisinin hissedildiği akış bölgesine hız sınır tabakası veya sınır tabaka denir.



Şekil 6.2

Dönümsüz (Çekirdek) Akış Bölgesi: Sürtünme kuvvetlerinin ihmal edilebilir ve radyal yönde hızın sabit kaldığı bölgedir.

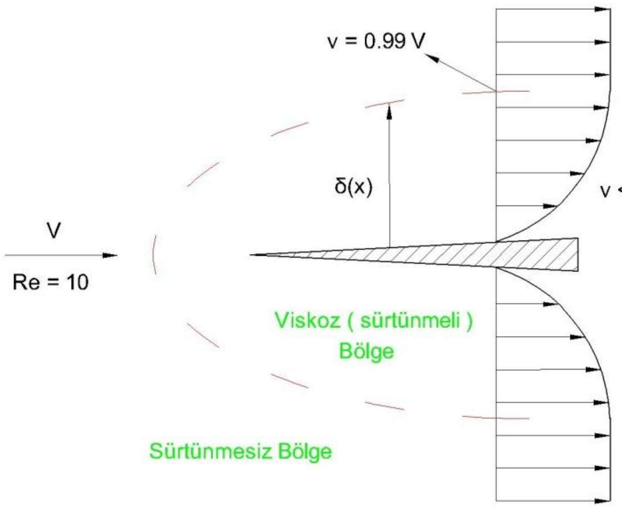
- Borudaki akışkan ısıtılmadığı veya soğutulmadığı durumlarda hidrodinamik olarak gelişmiş veya tam gelişmiş akış adını alır. Laminerli akışta tam gelişmiş hız profili parabolik, türbülanslıda ise daha yassıdır.

7.BÖLÜM: DIŞ AKIŞ

Akış, cismin yüzeyleri yakınında ve art izi içinde viskoz etkilere sahipken cisimden uzakta hemen hemen sürtünmesizdir. Bunlara serbest tabaka akışı denir. İç akışta bu tabaka cidarlar ile sınırlanırken dış akışta serbesttir.

Dış akış, küçük hız ve sıcaklık gradyenlerinin bulunduğu bir dış akış bölgesi ile çevrili olan ve serbestçe büyüyen sınır tabaka ile karakterize edilir. İç akışta akış alanının tamamı viskoz etkileri hâkimken dış akışlarda viskoz etkiler, sınır tabaka ve art izi gibi akış alanının bir bölümüne hapsedilmiş durumdadır.

7.1. Reynold Sayısı ve Geometrik Etkiler



Navier-Stokes Denklemlerinde viskoz terimlerin ihmal edilmesi için 2 durum vardır:

1-) *Viskoz Olmayan Akış Bölgesi:* Net viskoz kuvvetlerinin atalet ve/veya basınç kuvvetlerine göre ihmal edilebilir olduğu yüksek Re sayılı akış bölgesidir.

2-) *Potansiyel (Dönümsüz) Akış Bölgesi:* Çevrintinin ihmal edilebilir derecede küçük olması durumunda ortaya çıkar.

Sonuç Olarak: Viskoz olmayan bölgeye Euler Denklemleri, Viskoz bölgelere ise Navier-Stokes Denklemleri uygulanır.

$$Re = \frac{Atalet\ Kuvvetleri}{Viskoz\ (\,sürtünme\,)Kuvvetleri} = \frac{V.L}{\nu}$$

* Re sayısı düşük ise viskoz bölge çok büyük olur ve levhanın önüne, yanlarına yayılır. Böylece levha üzerine gelen akımın çoğu gecikmiş olur.

* Viskoz tabakalar laminer veya türbülanslı olsun çok incedirler. δ sınır tabaka kalınlığı u = 0.99 U olduğu andaki konumunun geometrik yeri kadardır.

* Dış akışta düz levha için sınır tabaka kalınlığı (δ):

$$Laminer\ Akış\ için: \qquad \frac{\delta}{x} = \frac{5}{Re,x^{1/2}}$$

$$Türbülanslı\ Akış\ için: \qquad \frac{\delta}{x} = \frac{0.16}{Re,x^{1/7}}$$

NOT: İç Akış için türbülansa geçiş sınırı Re = 2300 iken Dış Akışta geçiş sınırı $Re_x \geq 10^6$ kabul edilir.

* Serbest akımlı pürüzsüz bir düz plaka için geçiş süreci Kritik Reynold Sayısı $Re_x = 10^6$ ile başlayıp sınır tabakada geçiş Reynold Sayısı $Re_x = 3x10^6$ ile tamamen türbülanslı hale gelir.

7.2. Momentum İntegral Yaklaşımı

* Lineer Momentumun Kararlı Korunumun da $F = -D = \int_{KY} \rho.V.(\vec{V}.\vec{n})dA$ idi. Burada dA = b.dy olmak üzere viskoz kuvvetlerin oluşturduğu moment:

$$D(x) = \rho.b\int_{KY}^{\delta(x)} V.(V-v)dy \qquad [1]$$

Karman Sınır Analizi

θ : Momentum Kalınlığıdır ve toplam levha direncinin bir ölçüsüdür. Buna göre:

$$\theta = \int_0^{\delta(x)} \frac{v}{V}\left(1-\frac{v}{V}\right)dy \quad => \quad D(x) = \rho b V^2\theta \qquad [2]$$

* Viskoz direnç başka bir ifade ile Kayma Gerilmesine eşittir. Buna göre:

$$D(x) = b\int_0^x \tau_w(x)dx \quad => \quad \frac{dD}{dx} = b.\tau_w \qquad [3]$$

Burada [3] , [2] 'nin Türevli hali ise; $\tau_w = \rho V^2\frac{d\theta}{dx}$ olur.

*** Bu bağıntı hem laminer hem de türbülanslı düz levhalardaki akış için geçerlidir.

* Karman'ın V(x,y) için Yaklaşık Çözümü için hız dağılımını parabolik kabul edilirse:

$$V(x,y) \approx V\left(\frac{2y}{\delta}-\frac{y^2}{\delta^2}\right) \quad 0 \leq y \leq \delta(x)$$

$$=> [2]\ de\ yerine\ konursa \quad \theta = \frac{2}{15}\delta \quad bulunur.$$

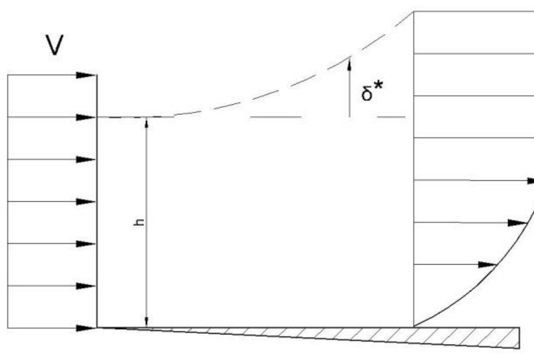
$$Sonuç\ Olarak => \frac{\delta}{x} \approx 5.5\left(\frac{\nu}{V.x}\right)^{1/2} = \frac{5.5}{Re,x^{1/2}} \qquad [4]$$

$$\tau_w = \mu\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{2\,\mu V}{\delta}$$

* Yüzey Sürtünme Katsayısı (C_f):

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho V^2} \approx \left(\frac{8/15}{Re,x}\right)^{1/2} = \frac{0.73}{Re,x^{\frac{1}{2}}} \qquad [5]$$

* Yer Değiştirme Kalınlığı (δ^*):



Yer değiştirme kalınlığı, sınır tabakanın tam dışındaki bir akım çizgisinin sınır tabaka etkisiyle çeperden uzaklaşma mesafesidir. Büyüyen sınır tabaka etkisiyle, dış akışın çeper kalınlığında gördüğü hayali artıştır.

Giriş ve çıkış arasında kütlenin korunumunu sağlamak için akım çizgileri δ^* kadar sapmaktadır. δ^* yer değiştirme kalınlığı olmak üzere:

$$\int_0^h \rho V b\, dy = \int_0^\delta \rho V b\, dy \qquad ve \qquad \delta = h + \delta^*$$

$$=> \ \delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

$$\delta^* \approx \frac{\delta}{3} \quad ve \quad \frac{\delta^*}{x} \approx \frac{1.83}{Re,x^{1/2}}$$

7.3. Sınır Tabaka Denklemi

2 Boyutlu akış için X yönü cidar boyunca ve Y'si cidara dik daimi, sıkıştırılamaz, viskoz akışı göz önüne alıyoruz. Yer çekiminin ihmal edildiği Navier – Stokes ve Süreklilik denklemiyle:

Süreklilik Denklemi: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

X Momentum: $\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$

Y Momentum: $\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$

Re sayısının büyük olması halinde sınır tabaka çok ince olur. Sınır tabaka yaklaşımına göre Hızlar V << U olur.

$$\frac{\partial u}{\partial x} \ll \frac{\partial u}{\partial y} \quad ve \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \ll \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \quad olur.$$

Böylece Y Momentum denklemi $\frac{\partial P}{\partial y} \approx 0$ olur ve denklem tamamıyla ihmal edilebilir. Sonuç olarak sınır tabaka kalınlığı boya göre değil uzunluk boyunca değişir.

$$=> \ \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{dP}{dx} = -\rho V \frac{dV}{dx} \qquad [6]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad olduğu\ ihmal\ edilirse$$

$$Cidar\ Boyunca\ X\ Momentum:\ u\frac{\partial u}{\partial x} + \vartheta\frac{\partial u}{\partial y} \approx V\frac{dV}{dx} + \frac{1}{\rho}\frac{d\tau}{dy}$$

$$Burada\ \tau = \begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial y} & Laminer\ Akış\ İçin \\ u\dfrac{\partial u}{\partial y} - \rho\overline{u^{\prime}\vartheta^{\prime}} & Türbülanslı\ \ Akış\ İçin \end{cases}$$

* u(x,y) ve ϑ (x,y) için tek sınır koşulu vardır.

y = 0 da cidar u = ϑ = 0 (Kayma Koşulu)

y = δ(x) 'de dış akış: u = U(x) (Yama Koşulu)

7.4. Düz Levha Üzerindeki Sınır Tabaka

* Laminer Akış için:

Blasius Değişken Dönüşümü ile çözüm yapılırsa:

$$\frac{\delta}{x} \approx \frac{5}{Re,x^{1/2}} \quad ; \quad \frac{\delta^*}{x} = \frac{1.721}{Re,x^{1/2}} \quad ; \quad C_f = \frac{0.664}{Re,x^{1/2}}$$

* Denklem [5] ve [3] 'de C_f yerine konursa:

$$D(x) = b\int_0^x \tau_w(x)\, dx = 0.664\ b.\rho^{\frac{1}{2}}.u^{\frac{1}{2}}.V^{\frac{3}{2}}.x^{\frac{1}{2}}$$

$$Direnç\ Katsayısı:\ C_D = \frac{D(x)}{\frac{1}{2}\rho b L V^2} \ => \ C_D = \frac{1.328}{Re,x^{1/2}} = 2\, C_f(l)$$

$$Momentum\ Kalınlığı:\ \frac{\theta}{x} = \frac{0.664}{Re,x^{1/2}}$$

$$Şekil\ Faktörü:\ H = \frac{\delta^*}{\theta}$$

NOT: Levha için H = 2.59 Kabul edilir.

* Türbülanslı Akış İçin:

Düz levha laminer sınır tabakası sonunda türbülanslı hale gelir ama bu değişimin oluşmaması için tek bir değer yoktur. Cidarlar iyileştirilerek Re sayısının $3x10^6$ değerine kadar geciktirilebilir. Tipik ticari yüzeyler ve çalkantılı serbest akımlar için Re = $5x10^5$ kabul edilir.

7.4. Düz Levha Üzerindeki Sınır Tabaka

C_D Direnç Katsayısı ve F direnç Kuvveti olmak üzere:

$$C_D = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho v^2 A} \qquad => \qquad F = C_D \frac{1}{2}\rho v^2 A$$

Buradaki A kritik kesiti (En Büyük Kesit Alanı) ifade eder.

Alan Kavramları:

- *Ön Bakış Alanı:* Cismin akım tarafından görüldüğü alandır.
- *Üst Bakış Alan:* Yukarıdan bakıldığında görülen alandır.
- *Islak Alan:* Gemiler ve mavnalar için geleneksel.

8.BÖLÜM: POTANSİYEL AKIŞ VE SAYISAL AKIŞKANLAR DİNAMİĞİ

8.1. Hız Potansiyeli

Viskoz Olmayan Akış Bölgeleri

Net viskoz kuvvetler, atalet ve/veya basınç kuvvetlerine oranla çok küçük kalıyorsa, bu durumda Navier-Stokes denklemlerinde viskoz terimler gider ve Euler Denklemine indirgenir.

Euler Denklemi:

$$\rho\left[\frac{\delta\vec{V}}{\delta t}+(\vec{V}.\vec{\nabla})\vec{V}\right]=-\vec{\nabla}P+\rho\vec{g}$$

Bu yalnızca $1/Re_x$ oranının küçük olması durumunda doğrudur. Dolayısıyla viskoz olmayan akış bölgeleri yüksek Re sayısına sahip bölgelerdir.

Not: Euler Denklemi, çeperlerden ve art izlerinden uzakta net viskoz kuvvetlerin ihmal edilebilir olduğu yüksek Re sayılı bölgeleri için uygun bir yaklaşımdır.

* Viskoz olmayan akış bölgelerinde daimi sıkıştırılamaz Bernoulli Denklemi:

$$\boxed{\frac{P}{\rho}+\frac{1}{2}V^2+gz=sbt\ (\,akım\ çizgisi\ boyunca\,)}$$

8.2. Dönümsüz Akış

Hiçbir net dönmeye sahip olmayan akış bölgelerine dönümsüz akış bölgeleri denir. Viskoz olmayan bir akış bölgesinin dönümsüz olmayabileceği (Katı cisim gibi dönme) durumları mümkünse de genel olarak katı çeperlerden ve cisimlerin art izlerinden uzak viskoz olmayan akış bölgeleri dönümsüzdür. Buna göre Dönümsüzlük koşulu:

$$\frac{\delta v}{\delta x}=\frac{\delta u}{\delta y}\quad;\quad\frac{\delta\omega}{\delta y}=\frac{\delta u}{\delta z}\quad;\quad\frac{\delta u}{\delta z}=\frac{\delta\omega}{\delta x}$$

8.3. Hız Potansiyeli

Düşük hızlı akışların dönümsüz olduğu kabul eldir. Hız Potansiyelinin Fonksiyonu; Φ(x,y,z,t) ise, Dönümsüz akış bölgeleri için,

$$u=\frac{\delta\Phi}{\delta x}\qquad v=\frac{\delta\Phi}{\delta y}\qquad w=\frac{\delta\Phi}{\delta z}$$

Düzlemsel Kutupsal Koordinatlarda,

$$v_r=\frac{\delta\Phi}{\delta r}=\frac{1}{r}\frac{\delta\psi}{\delta\theta}\ ;\ v_\theta=\frac{1}{r}\frac{\delta\Phi}{\delta\theta}=-\frac{\delta\psi}{\delta r}\ ;\ v_z=\frac{\delta\Phi}{\delta z}$$

Süreklilik Denklemiyle;

$$\boxed{\frac{\delta^2\Phi}{\delta x^2}+\frac{\delta^2\Phi}{\delta y^2}+\frac{\delta^2\Phi}{\delta z^2}=0}$$

Kutupsal Koordinatlarda Süreklilik Denklemi;

$$\frac{1}{r}\frac{\delta}{\delta r}\left(r\frac{\delta\Phi}{\delta r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\delta^2\Phi}{\delta\theta^2}=0$$

8.4. Düzlemsel Dönümsüz Akış Bölgeleri

Akım Fonksiyonu:

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}\qquad ve\qquad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

Dönümsüzlük Koşulu ψ için Laplace Denklemine ile

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0$$

Silindirik Koordinatlarda,

$$v_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\qquad ve\qquad v_\theta=-\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

8.5. Temel Düzlemsel Akış Çözümleri

Üniform Akım: $\psi=\vartheta.\mathrm{y}$ $\qquad \Phi=\vartheta.\mathrm{x}$

* α Eğim açılı Üniform akım:

$$\psi=\vartheta\,(\mathrm{y}.\cos\alpha-\mathrm{x}.\sin\alpha)\qquad\Phi=\vartheta(\mathrm{x}.\cos\alpha-\mathrm{y}.\sin\alpha)$$

Kaynak veya Kuyu: m Düzlemsel debi olmak üzere,

$$*\ m=\frac{\dot{\forall}}{2\pi b}$$

* m = (2πr). v_r [m^2/s]

* Silindirik koordinatlara göre:

$$v_r=\frac{\dot{\forall}}{2\pi br}=\frac{m}{r}=\frac{1}{r}\frac{\delta\psi}{\delta\theta}=\frac{\delta\phi}{\delta r}$$

$$v_\theta=-\frac{\delta\psi}{\delta r}=\frac{\delta\phi}{\delta\theta}=0$$

Sonuç olarak: $\psi=\mathrm{m}\theta$ $\qquad \Phi=\mathrm{m}.\ln(\mathrm{r})$

Çevri (Vortex): $v_\mathrm{r}=0$ ise,

$$\psi=-\mathrm{K}.\ln(\mathrm{r})\qquad\Phi=\mathrm{K}.\theta$$

$$a=\frac{m}{V}$$

8.6. Sayısal Akış Dinamiği

$$\mathrm{V}\,(\mathrm{x},\mathrm{y})=\frac{\psi(\mathrm{x}+1,\mathrm{y})-\psi(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\Delta\mathrm{y}}$$

9.BÖLÜM: SIKIŞTIRILABİLİR AKIŞLAR (GAZ DİNAMİĞİ)

9.1. Giriş

Sıkıştırılabilirliğin ölçüsü Mach sayısıdır.

$$Ma = \frac{V}{a}$$

Burada,

V : Akış Hızı

A : Akışkan içindeki Ses Hızıdır.

* Ma > 0.3 => Sıkıştırılabilir Akışkandır.

* Sıkıştırılabilir akışlarda ρ değişken olacağından (Pϑ =RT) hal denklemlerinin de kullanılması gereklidir. Kolaylaştırmak amacıyla İzantropik (Akış tersinir Adyabatik) akış kabul edilerek basitleştirilebilir.

9.2. Mach Sayısı

0.3 < Ma < 0.8 => Subsonic (Ses Altı)

0.8 < Ma < 1.2 => Transonic (Geçiş)

1.2 < Ma < 3.0 => Supersonic (Ses Üstü)

3.0 < Ma => Hipersonic

9.3. Termodinamik Hatırlatmalar

Enerji Denklemi

$$q - w = \Delta u + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g\Delta z \qquad \left[\frac{kj}{kg}\right]$$

$$Q - W = m\left(\Delta u + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g\Delta z\right) \qquad [kj]$$

$$\dot{Q} - \dot{W} = \dot{m}\left(\Delta u + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g\Delta z\right) \qquad \left[\frac{kj}{s}\ ;\ kW\right]$$

Özgül Isılar

$$u_2 - u_1 = C_\vartheta (T_2 - T_1) \quad kj/kg$$
$$h_2 - h_1 = C_P (T_2 - T_1) \quad kj/kg$$

* $C_P = C_\vartheta + R$

* $R = \frac{Ru}{mol} = \frac{8314}{mol}$

$$K = \frac{C_P}{C_\vartheta} \qquad \begin{matrix} Tek \rightarrow 1.667 \\ Çift \rightarrow 1.4 \end{matrix}$$

Entropi

$$s_2 - s_1 = C_P \ln\frac{T_2}{T_1} - R \ln\frac{P_2}{P_1}$$

$$s_2 - s_1 = C_\vartheta \ln\frac{T_2}{T_1} - R \ln\frac{\rho_2}{\rho_1}$$

İzantropik İlişkiler

$S_2 - S_1 = 0$ ise,

$$\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{k}{k-1}} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^k$$

9.4. Ses Hızı

Ses hızı durgun bir akışkan içinde hareket eden küçük şiddetteki bir basınç dalgasıdır. Ses hızı sınırlarda adyabatiktir. Çünkü kendi sınırları içinde başka bir yerde sıcaklık değişimi yoktur. Ses hızına ulaşıp sıkışan akışta yoğunluk değişeceğinden sıcaklığı da değişir. Yani kendi içinde sıcaklık değişimi olduğundan adyabatiktir.

$$a^2 = \left(\frac{\delta P}{\delta \rho}\right) \quad İzantropi\ Kullanılır$$

$$\boxed{a = \sqrt{\frac{k.P}{\rho}} = \sqrt{k.R.T}}$$

9.5. Adyabatik ve İzantropik Akış

* Enerji denkleminde akışın Adyabatik ve İzantropik olduğunu kabul edersek:

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} = sbt$$

Buradaki sabit akışın Adyabatik olarak durgun hale geldiğinde sahip olacağı toplam Entalpiye denir. Bu değere h_0 *durma entalpisi* denir. Durma olayı sırasında kinetik enerji entalpiye veya akışkanın toplam enerjisine (iç enerji + akış enerjisi) dönüşür.

$$\boxed{h_0 = h + \frac{V^2}{2} = sbt}$$

* İdeal gazlar için; $h = C_P T$ =>

$$C_P T_0 = C_P T + \frac{V^2}{2}$$

Burada T_0 Durma sıcaklığı ise,

$$\boxed{T_0 = T + \frac{V^2}{2C_P}}$$

Not: Durma entalpisi veya durma sıcaklığı, entalpi ve sıcaklık mutlak sıfıra düştüğünde hız max. Olur.

$$\boxed{V_{max} = \sqrt{2h_0} = \sqrt{2C_P T_0}}$$

* İdeal gaz yasasından $C_pT = \left[\frac{K.R}{K-1}\right].T = \frac{a^2}{K-1}$ =>

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{V^2}{2C_pT} \qquad ve \qquad \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2}.\frac{V^2}{a^2}$$

$$\boxed{\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2}.Ma^2}$$

Buna göre,

$$\frac{a_0}{a} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{1/2} = \left[1 + \frac{k-1}{2}.Ma^2\right]^{1/2}$$

$$\frac{P_0}{P} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{k}{k-1}} = \left[1 + \frac{k-1}{2}.Ma^2\right]^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{1}{k-1}} = \left[1 + \frac{k-1}{2}.Ma^2\right]^{\frac{1}{k-1}}$$

Sonic Noktalardaki Kritik Değerleri

Ma = 1 ve k = 1.4 için kritik değerleri,

$$\frac{P^*}{P_0} = 0.5283$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = 0.6339$$

$$\frac{T^*}{T_0} = 0.8333$$

$$\frac{a^*}{a_0} = 0.9129$$

Kritik hız V^* tanım gereği sonic ses hızı a^* a eşit İzantropik veya Adyabatik akışta bir referans hızı olarak kullanılır.

$$V^* = a^* = \sqrt{\frac{2K}{K+1}R.T_0} = \sqrt{K.R.T^*}$$

9.6. Normal Şok Dalgası

$$\beta = \frac{k+1}{k-1}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + \beta.P_2/P_1}{\beta + P_2/P_1}$$

Ranlaire – Hugoniot Denklemi

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2}(P_2 - P_1)\left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1}\right)$$

$$\frac{s_2 - s_1}{C_\vartheta} = ln\left[\frac{P_2}{P_1}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^k\right]$$

9.7. Mach Sayısı Denklemleri

$$\boxed{\frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{k+1}[2k.Ma_1{}^2 - (k-1)] \qquad [1]}$$

$$\boxed{\frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + k.Ma_1^2}{1 + k.Ma_2} \qquad [2]}$$

1 ve 2 denklemleri eşitlenirse,

$$\boxed{Ma_2^2 = \frac{(k-1)Ma_1^2 + 2}{2k.Ma_1^2 - (k-1)}}$$

Ayrıca,

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{(k+1)Ma_1^2}{(k-1).Ma_1^2 + 2}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = [2 + (k-1)Ma_1^2]\frac{2kMa_1^2 - (k-1)}{(k+1)^2.Ma_1^2}$$

* $T_{0,2} = T_{0,1}$ =>

$$\frac{P_{0,2}}{P_{0,1}} = \frac{\rho_{0,2}}{\rho_{0,1}} = \left[\frac{(k+1)Ma_1^2}{(k-1).Ma_1^2 + 2}\right]^{\frac{k}{k-1}}\left[\frac{(k+1)}{2kMa_1^2 - (k-1)}\right]^{\frac{1}{k-1}}$$

$$\frac{a_2{}^*}{a_1{}^*} = \frac{Ma_2}{Ma_1}\left[\frac{2 + (k-1)Ma_1^2}{2 + (k-1)Ma_2^2}\right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

10.BÖLÜM: AÇIK KANALLARDA AKIŞ

10.1. Giriş

Borularda akış basınç farkları ile oluşurken burada yerçekimi ile akış meydana gelir.

10.2. Açık Kanal Notasyonları

Hidrolik Yarıçap:

$$R_h = \frac{A}{P} \quad [m]$$

Burada,

A: Kesit alanı

P: Islak Çevredir.

Hidrolik Çap:

$$D_h = \frac{4A}{P} = 4R_h$$

Enerji Denklemi:

$$\frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_f$$

10.3. Froude Sayısı ve Dalga Hızı

Açık kanal akışlarında V kesitteki ortalama hızı ve L_c karakteristik uzunluk olmak üzere,

$$Froude\ sayısı: \qquad Fr = \frac{V}{\sqrt{gl_c}}$$

* Dikdörtgen kanallarda L_c yerine akış derinliği y alınır.

Akışı,

Fr < 1 => Kritik altı akış

Fr = 1 => Kritik akış

Fr > 1 => Kritik üstü akış olarak sınıflandırabiliriz.

Ayrıca,

$$Fr^2 = \frac{V^2 \rho A}{gl_c \rho A} = \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)\rho V^2 A}{mg} = \frac{Atalet\ Kuvvetleri}{Yerçekimi\ Kuvveti}$$

10.4. Yüzey Dalgalarının Hızı

Sığ yüzey dalgasının hızı:

$$C_0 = \sqrt{gy}$$

10.5. Üniform Akış

Üniform akıştaki akış derinliği y, ortalama akış hızı V_0 ve eğimi S_0, sürtünme katsayısı f sabit olan açık kanal akışlarında yük kayıpları yükseklik düşüşüne eşitlenince limit hıza ulaşır ve üniform akış oluşur. Bu nedenle,

Yük kaybı;

$$h_f = f\frac{L}{D_h}\frac{V^2}{2g} \quad yada \quad S_o L = f\frac{L}{R_h}\frac{V_0^2}{8g}$$

Üniform akış hızı ve debisi:

$$V_0 = C\sqrt{S_0 R_h} \quad ve \quad \dot{\forall} = CA\sqrt{S_0 R_h}$$

$$Chezy\ Katsayısı: \quad C = \sqrt{\frac{8g}{f}}$$

10.6. Manning Pürüzlülük Bağıntısı

$$C = \sqrt{\frac{8g}{f}} = \frac{\alpha}{n}R_h^{1/6} \qquad \begin{array}{l} SI\ Sisteminde\ \ \alpha = 1 \\ BG\ Sisteminde\ \alpha = 1.486 \end{array}$$

Buna göre üniform akış:

$$V_0 = \frac{1}{n}R_h^{2/3}S_0^{1/2} \quad ve \quad \dot{\forall} = \frac{A}{n}R_h^{2/3}S_0^{1/2}$$