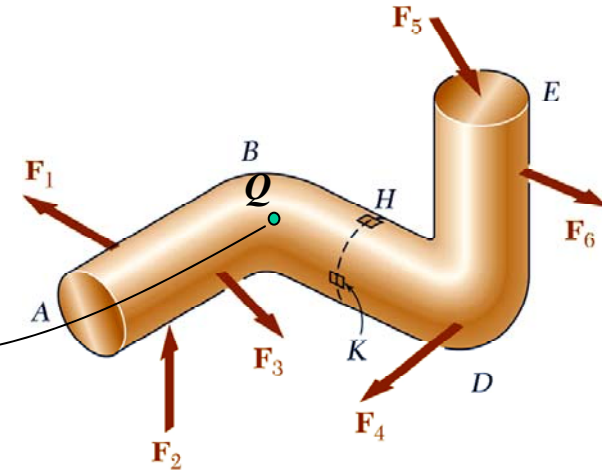
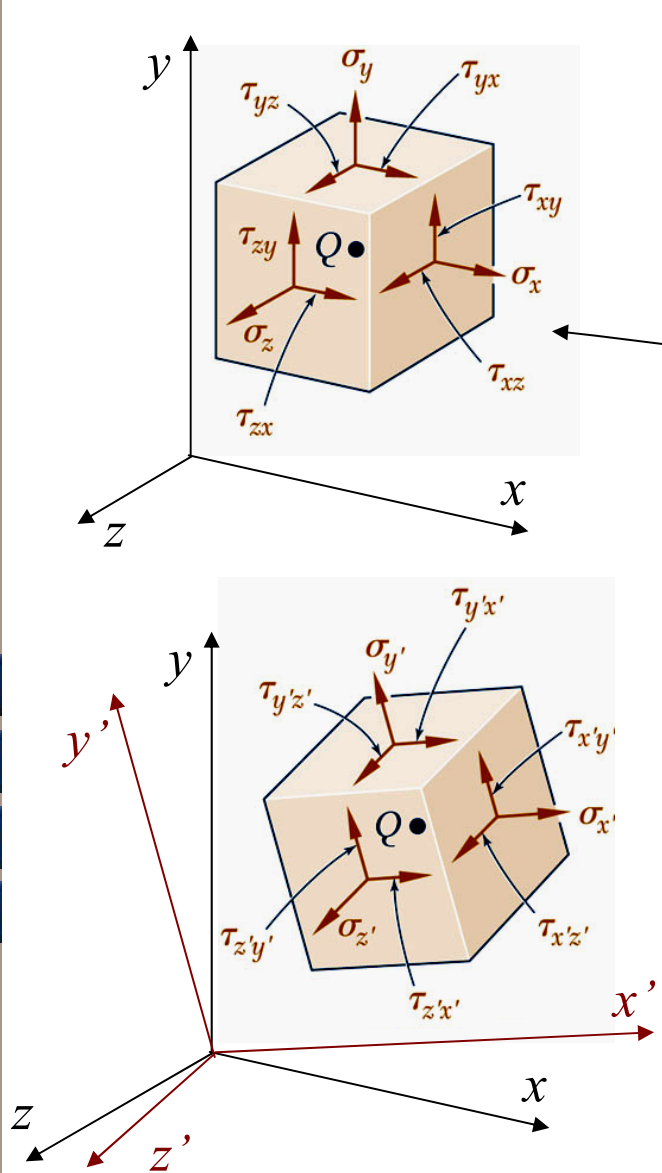
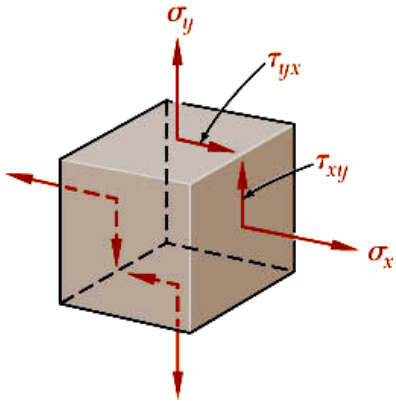


GERİLME VE ŞEKİL DEĞİŞTİRME DÖNÜŞÜM BAĞINTILARI



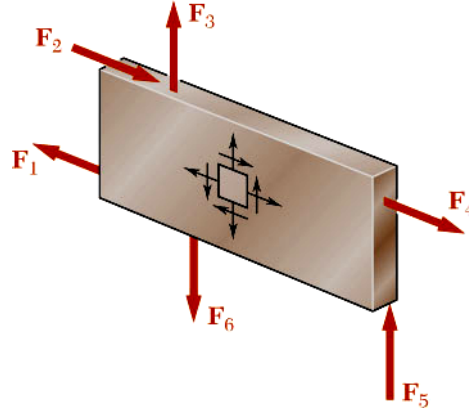
- Genel yükleme durumunda, bir Q noktasını üç boyutlu olarak temsil eden kübik gerilme elemanı üzerinde 6 bileşeni gösterilebilir: σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} .
- Söz konusu kübik eleman $x-y-z$ eksenleri yerine döndürülmüş $x'-y'-z'$ eksenlerine paralel alınsaydı gerilme bileşenleri; σ'_x , σ'_y , σ'_z , τ'_{xy} , τ'_{yz} , τ'_{zx} olacaktı.
- Gerilme dönüşüm bağıntıları kullanılarak $x-y-z$ eksen takımındaki 6 gerilme bileşeninin döndürülmüş başka bir eksen takımındaki karşılıkları bulunur.

Düzlem gerilme durumunda dönüşüm bağıntıları

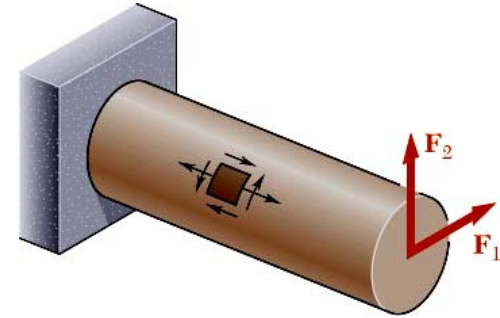


$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$$

3 boyutlu kübik eleman



İnce bir plakada orta düzlemde etkiyen kuvvetlerden dolayı düzlem gerilme oluşur.

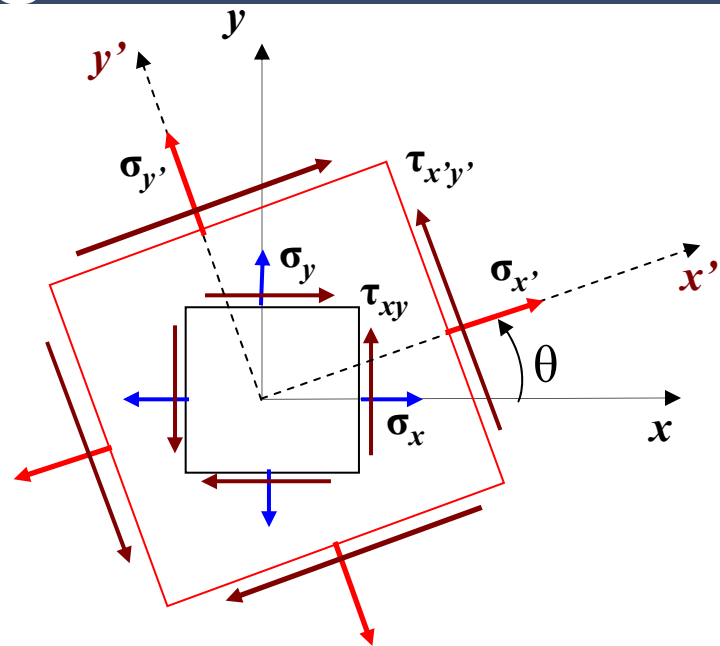
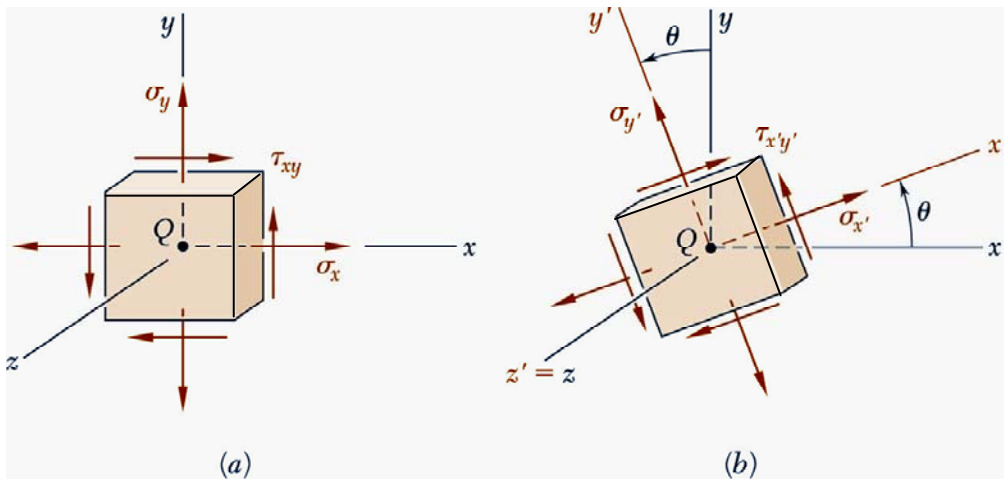


Yapısal bir elemanın veya makine parçasının dış/serbest yüzeyinde düzlem gerilme durumu (yüzeye uygulanmış dış kuvvet/kuvvetler yoksa) ortaya çıkar.

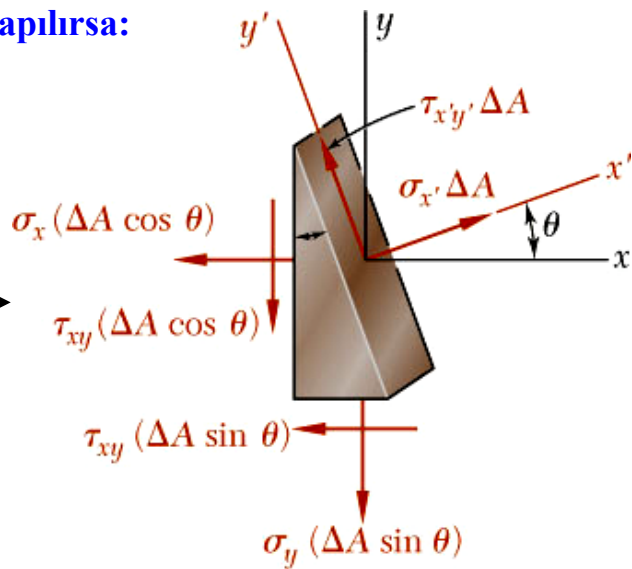
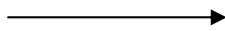
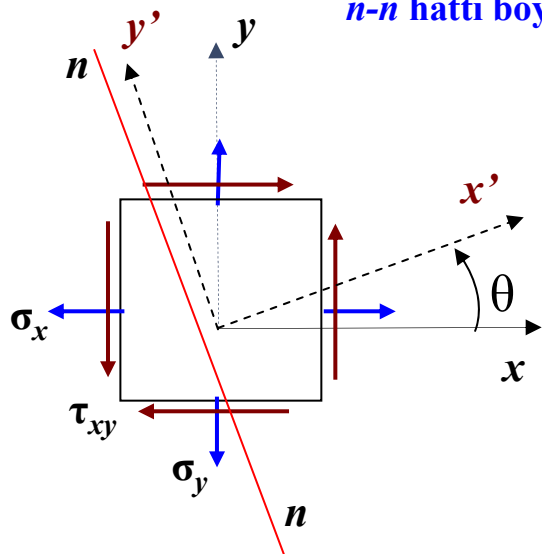
- İnce cidarlı basınçlı tank ve tüplerde de düzlem gerilme durumu söz konusudur.

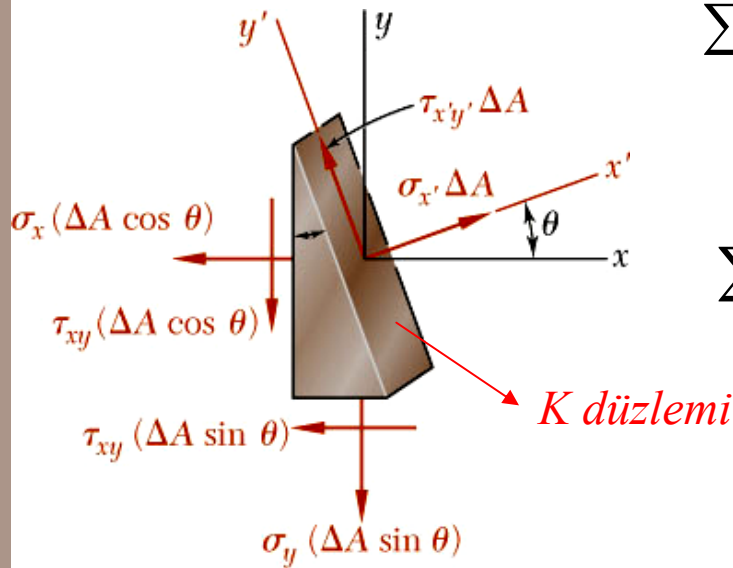


Düzlem gerilme elemanı



n-n hattı boyunca bir kesim yapılırsa:





$$\sum F_{x'} = 0 = \sigma_{x'} \Delta A - \sigma_x (\Delta A \cos \theta) \cos \theta - \tau_{xy} (\Delta A \cos \theta) \sin \theta - \sigma_y (\Delta A \sin \theta) \sin \theta - \tau_{xy} (\Delta A \sin \theta) \cos \theta$$

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$\sum F_{y'} = 0 = \tau_{x'y'} \Delta A + \sigma_x (\Delta A \cos \theta) \sin \theta - \tau_{xy} (\Delta A \cos \theta) \cos \theta - \sigma_y (\Delta A \sin \theta) \cos \theta + \tau_{xy} (\Delta A \sin \theta) \sin \theta$$

$$\tau_{x'y'} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

• σ' bağıntısında $\theta = \theta + 90^\circ$ yazılarak:

$$\begin{aligned} \cos(\theta + 90^\circ) &= -\sin \theta \\ \sin(\theta + 90^\circ) &= \cos \theta \end{aligned}$$

$$\sigma_{y'} = \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

Trigonometrik dönüşüm bağıntıları kullanılarak bu denklemler şu şekilde düzenlenebilir:

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (1)$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (2)$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (3)$$

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y$$

Mohr Çemberi, Asal Gerilmeler ve Maksimum Kayma Gerilmesi

(1)ve (3) nolu denklemler yeniden düzenlenip kareleri alınarak taraf tarafa toplanırsa parametrik bir daire denklemini elde edilir

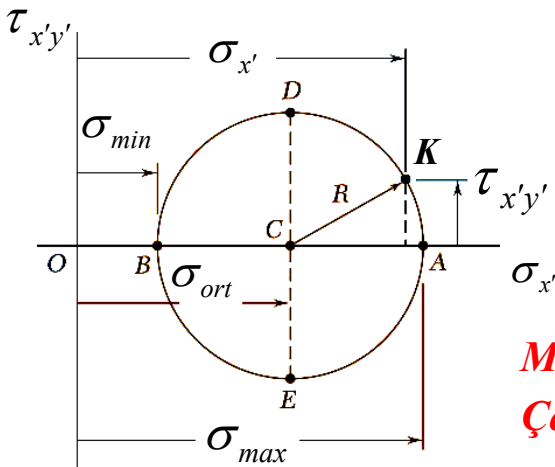
$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta\right)^2$$

$$(\tau_{x'y'})^2 = \left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta\right)^2$$

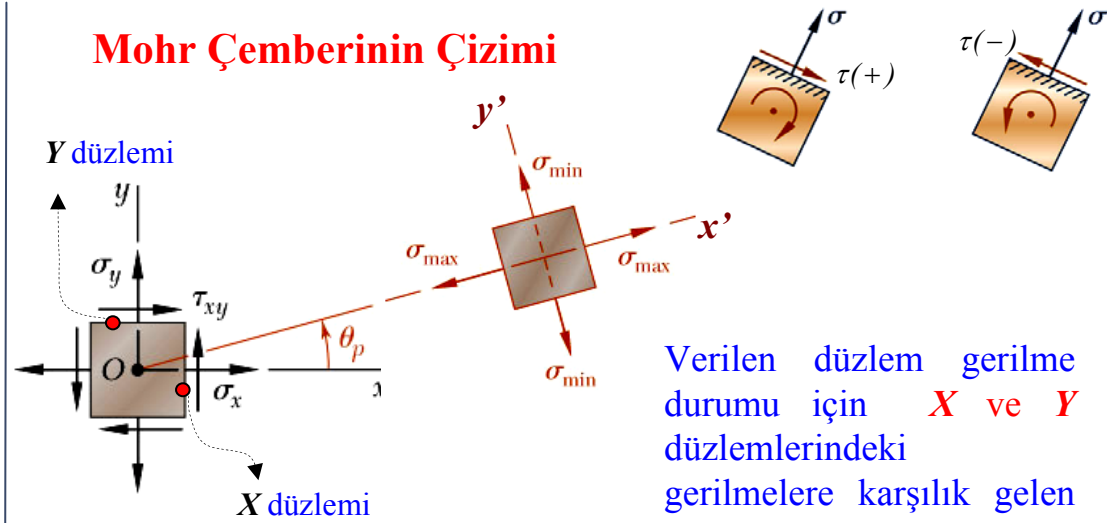
$$(\sigma_{x'} - \sigma_{ort})^2 + (\tau_{x'y'})^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

$$(\sigma_{x'} - \sigma_{ort})^2 + \tau_{x'y'}^2 = R^2$$

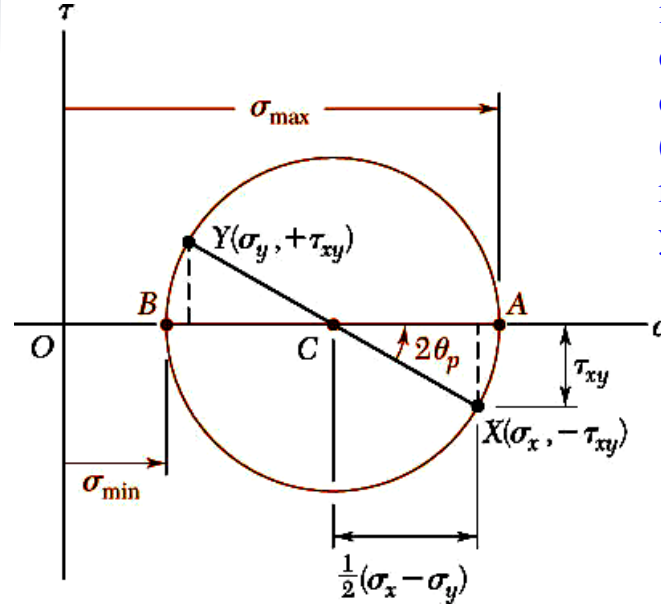
$$\sigma_{ort} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}; R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



Mohr Çemberinin Çizimi



Verilen düzlem gerilme durumu için **X** ve **Y** düzlemlerindeki gerilmelere karşılık gelen noktalar **σ-τ** eksenlerinde işaretlenir. Bu iki noktayı çap kabul eden bir çember çizilir. Çemberin merkezi (C noktası) orijinden (O noktası) **σ_{ort}** kadar uzakta yer alır.



$$\sigma_{max,min} = \sigma_{ort} \pm R$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

- En büyük ve en küçük normal gerilmeleri (*asal gerilmeler*) Mohr çemberinden de rahatlıkla bulunabilir:

$$\sigma_{max,min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

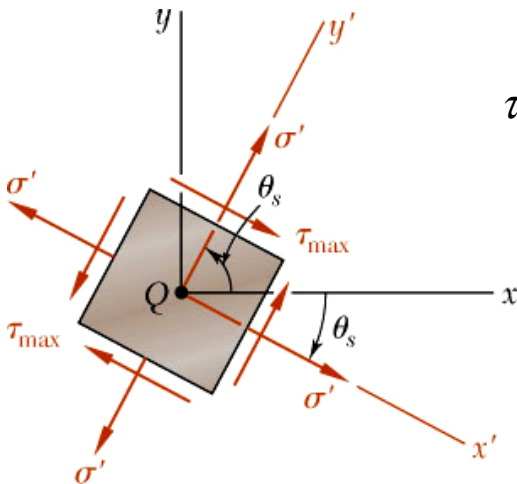
- Asal gerilmelerin* meydana geldiği düzlemlerde kayma gerilmeleri “0” dır. Buna göre asla gerilme doğrultularını (θ_p) veren bağıntı:

$$\tau_{x'y'} = 0 \rightarrow$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

- Gerilme elemanı üzerinde θ kadar bir dönme Mohr Çemberi üzerinde 2θ kadar bir dönmeye karşılık gelmektedir. Burada θ_p aralarında 90° bulunan iki asal gerilme doğrultusunu göstermektedir.

Maksimum kayma gerilmeleri



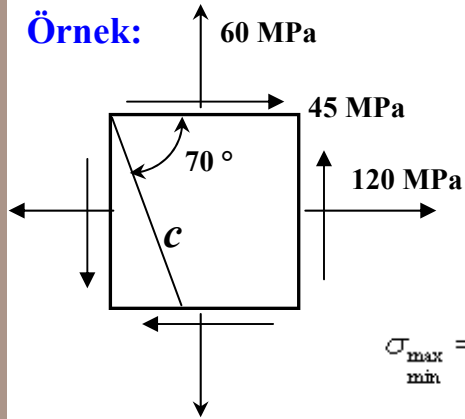
$$\tau_{max} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

$$\sigma'_x = \sigma_{ort} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

Burada θ_s aralarında 90° bulunan iki **maksimum kayma gerilme** düzleminin normalini vermektedir. θ_p ile θ_s arasında 45° 'lik bir açı vardır. Maksimum kayma gerilmeleri ortalama normal gerilme düzlemlerinde meydana gelir.

Örnek:



Yanda verilen gerilme durumu için;

- Asal gerilmeler ve doğrultularını bularak bir gerilme elemanı üzerinde gösteriniz,
- c düzlemindeki normal ve kayma gerilmelerinin değerini hesaplayınız.

Burada analitik çözüm verilmiştir (Mohr çemberi ile de çözüm yapılabilir).

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{120 + 60}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{120 - 60}{2}\right)^2 + 45^2}$$

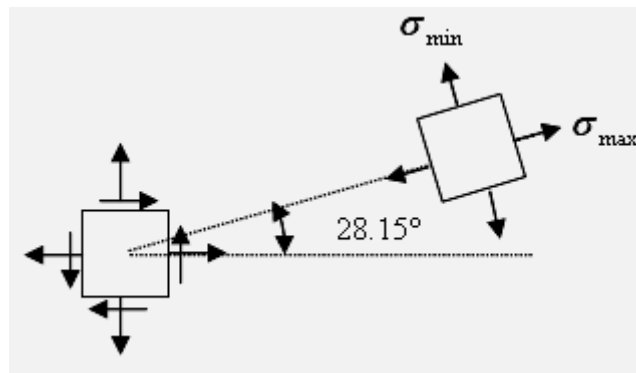
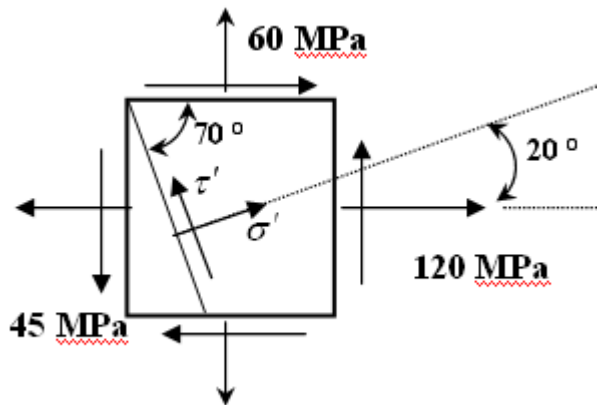
$$\sigma_{\max} \cong 144 \text{ MPa}, \sigma_{\min} \cong 36 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 45}{120 - 60} \rightarrow 2\theta_p = 56.3^\circ; \theta_p = 28.15^\circ$$

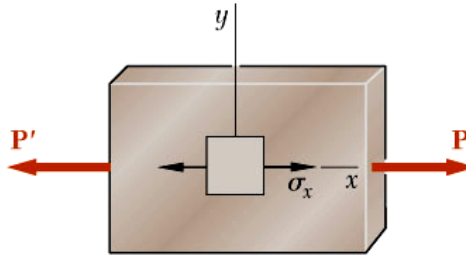
$$\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta = \frac{120 + 60}{2} + \frac{120 - 60}{2} \cos 40 + 45 \sin 40 = 142 \text{ MPa}$$

$$\tau' = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta = -\frac{(120 - 60)}{2} \sin 40 + 45 \cos 40 = 15.2 \text{ MPa}$$

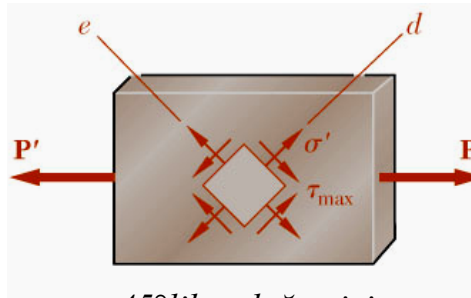
$\sigma_x > \sigma_y$ olduğundan saat ibreleri ters yönünde θ_p kadar döndüğünde σ_{\max} 'ın bulunduğu düzleme ulaşılır. Ya da dönüşüm formülünde (σ'), $\theta = \theta_p$ yazılırsa 144 MPa bulunur.



Örnek: Eksenel yükleme için Mohr çemberi

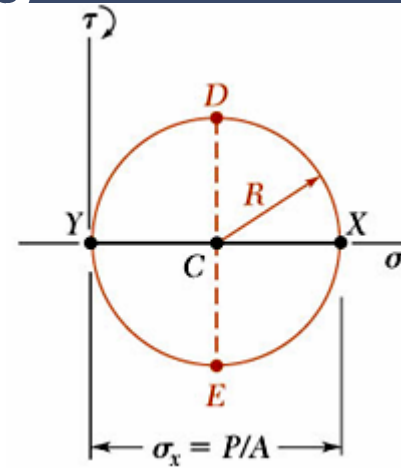


$$\sigma_x = \frac{P}{A}, \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

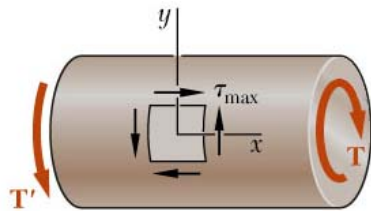


45°lik doğ. için

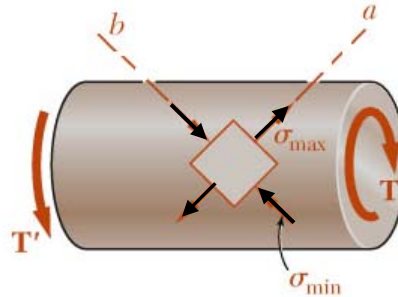
$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \frac{P}{2A}$$



Örnek: Saf burulma (pure torsion) durumu için Mohr çemberi

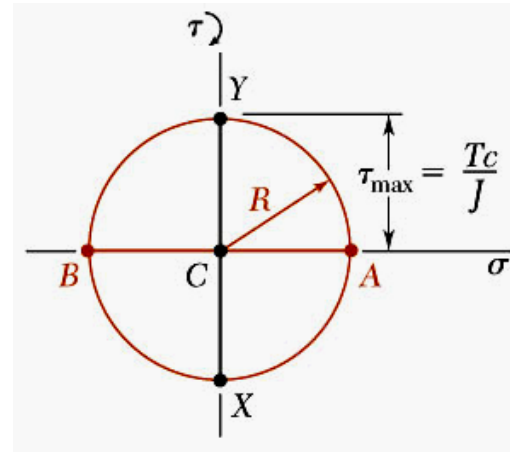


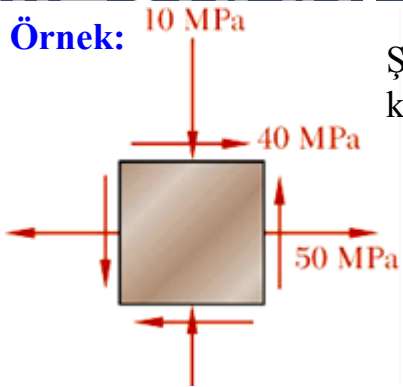
$$\sigma_x = \sigma_y = 0 \quad \tau_{xy} = \frac{Tc}{J}$$



45°lik doğ. için

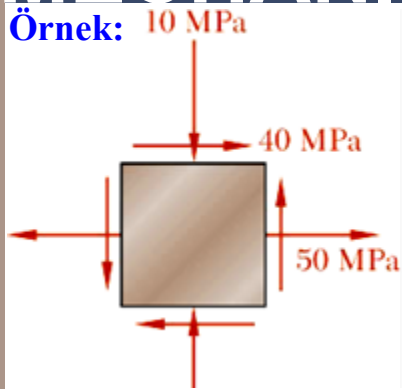
$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{Tc}{J} \quad \tau_{xy} = 0$$



Örnek:

Şekildeki düzlem gerilme durumu için (a) asal gerilmeleri ve doğrultularını, (b) maksimum kayma gerilmelerini ve düzlemlerini, bulunan düzlemlerdeki normal gerilmeleri bulunuz.





Şekildeki düzlem gerilme durumu için **Mohr Çemberini** çizerek (a) asal gerilmeleri ve doğrultularını/düzlemlerini, (b) maksimum kayma gerilmelerini ve düzlemlerini, bulunan düzlemlerdeki normal gerilmeleri bulunuz.

$$\sigma_{ort} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{(50) + (-10)}{2} = 20 \text{ MPa}$$

$$CF = 50 - 20 = 30 \text{ MPa} \quad FX = 40 \text{ MPa}$$

Yarıçap: $R = CX = \sqrt{(30)^2 + (40)^2} = 50 \text{ MPa}$

- Asal gerilmeler ve düzlemleri :

$$\sigma_{\max} = OA = OC + CA = 20 + 50$$

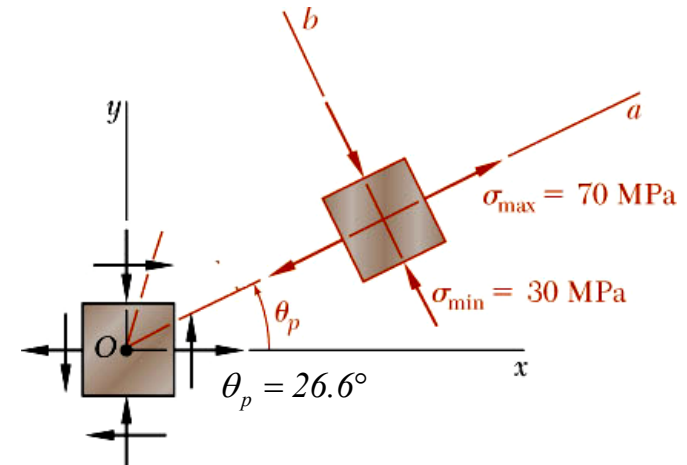
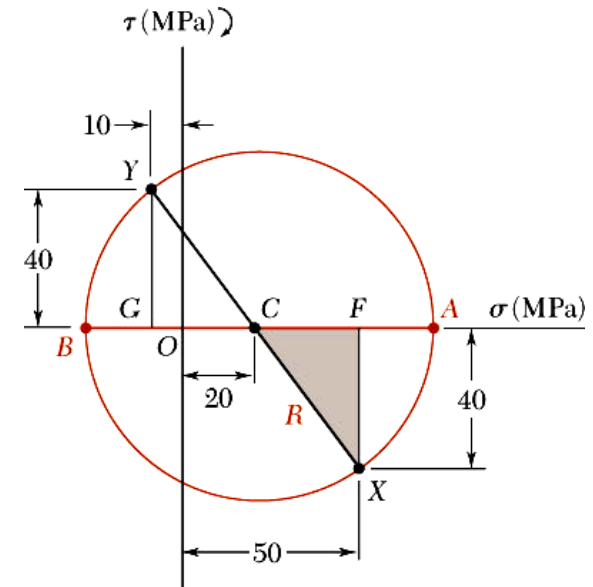
$$\sigma_{\max} = 70 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\min} = OB = OC - BC = 20 - 50$$

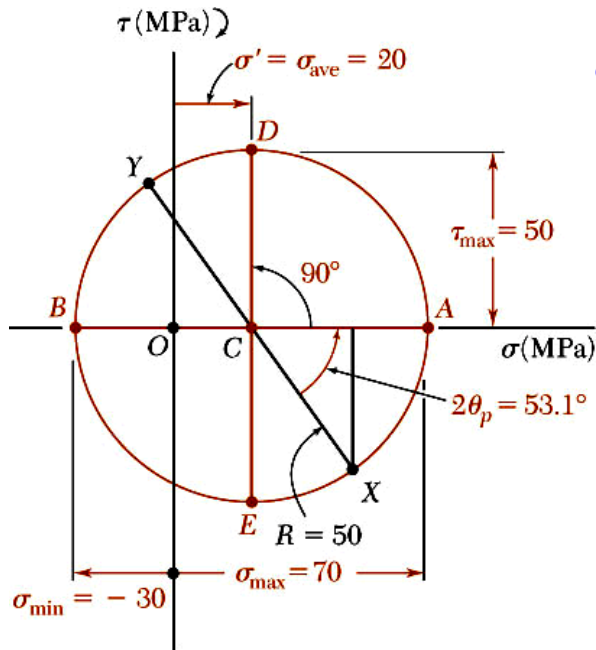
$$\sigma_{\min} = -30 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{FX}{CF} = \frac{40}{30}$$

$$\theta_p = 26.6^\circ$$



Maksimum kayma gerilmeleri ve düzlemleri/doğrultuları



$$\tau_{\max} = R$$

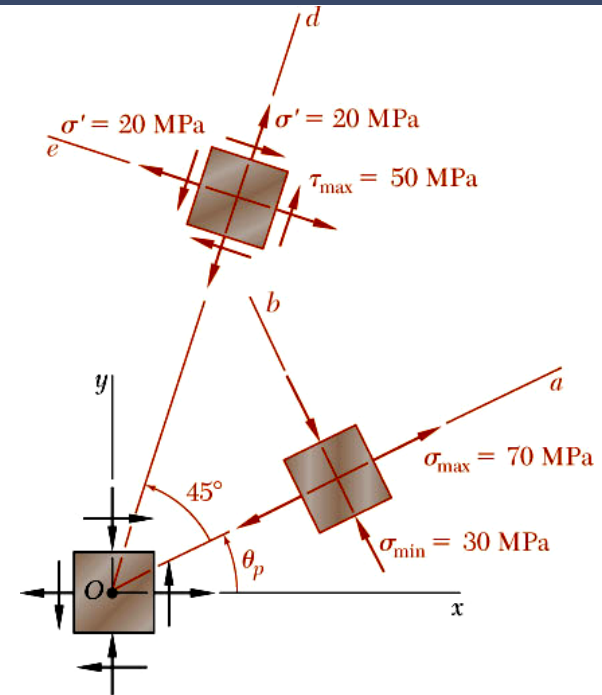
$$\tau_{\max} = 50 \text{ MPa}$$

$$\theta_s = \theta_p + 45^\circ$$

$$\theta_s = 71.6^\circ$$

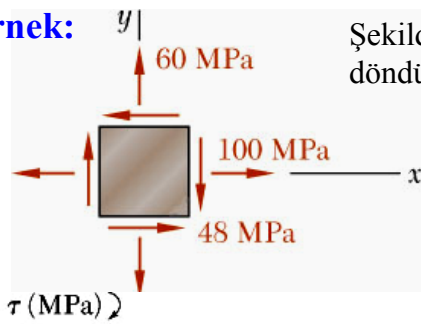
$$\sigma' = \sigma_{\text{ort}}$$

$$\sigma' = 20 \text{ MPa}$$



Örnek:

Şekildeki düzlem gerilme durumu için (a) asal gerilmeleri ve doğrultularını, (b) elemanın 30 ° derece döndürülmesiyle elde edilen yüzeylerdeki gerilmeleri bulunuz.



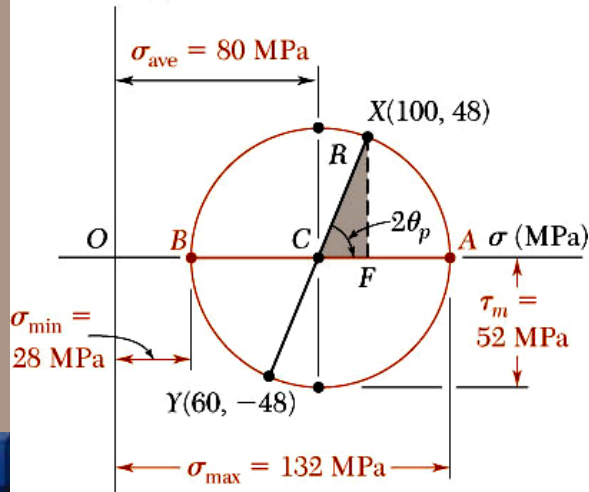
$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{100 + 60}{2} = 80 \text{ MPa}$$

$$R = \sqrt{(CF)^2 + (FX)^2} = \sqrt{(20)^2 + (48)^2} = 52 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{XF}{CF} = \frac{48}{20} = 2.4$$

$$2\theta_p = 67.4^\circ$$

$$\theta_p = 33.7^\circ \text{ clockwise}$$

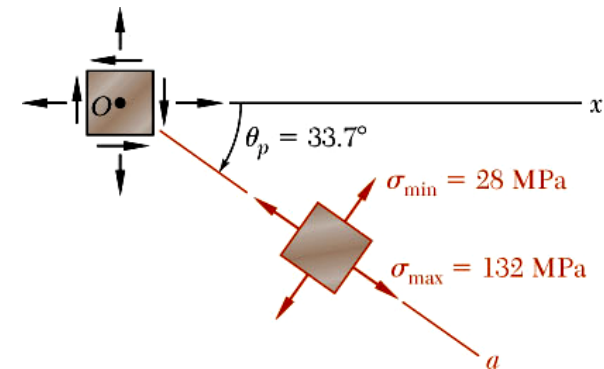


$$\sigma_{max} = OA = OC + CA$$

$$\sigma_{max} = 80 + 52 = 132 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{min} = OA = OC - BC$$

$$\sigma_{min} = 80 - 52 = 28 \text{ MPa}$$



$\theta=30^\circ$ deki gerilmeler

$$\phi = 180^\circ - 60^\circ - 67.4^\circ = 52.6^\circ$$

$$\sigma_{x'} = OK = OC - KC = 80 - 52 \cos 52.6^\circ$$

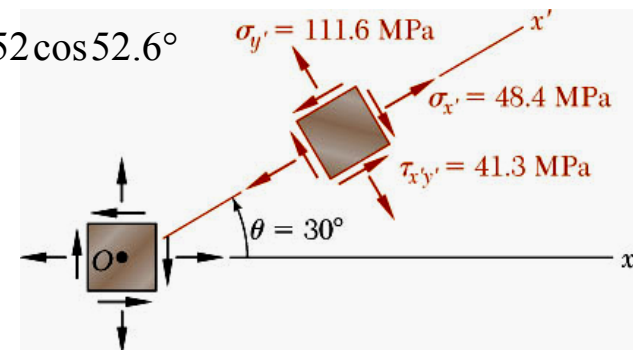
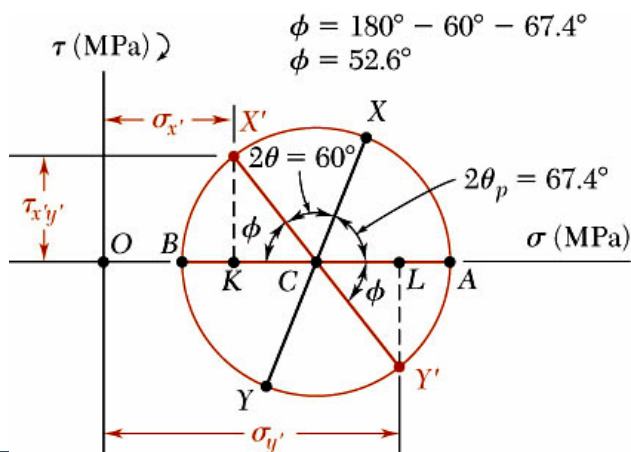
$$\sigma_{y'} = OL = OC + CL = 80 + 52 \cos 52.6^\circ$$

$$\tau_{x'y'} = KX' = 52 \sin 52.6^\circ$$

$$\sigma_{x'} = +48.4 \text{ MPa}$$

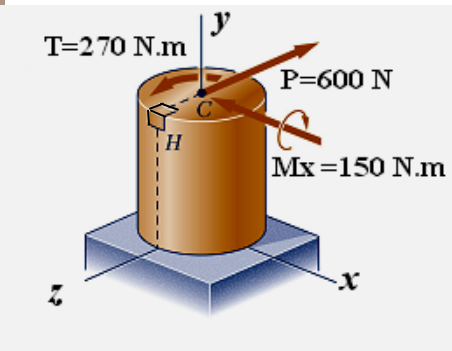
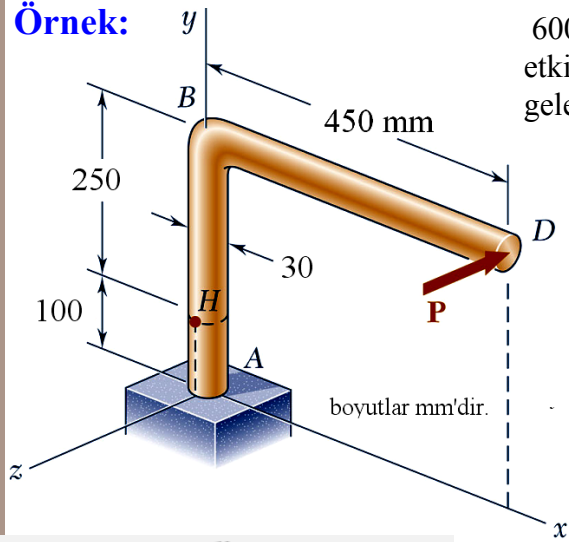
$$\sigma_{y'} = +111.6 \text{ MPa}$$

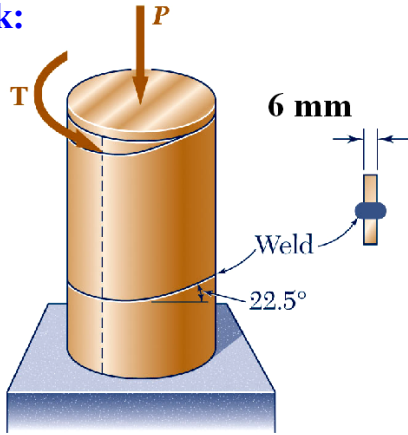
$$\tau_{x'y'} = 41.3 \text{ MPa}$$



Örnek:

600 N luk kuvvet D noktasında z eksenine paralel olarak şekildeki dairesel kesitli dirseğe etmektedir. Buna göre; H noktasındaki bir gerilme elamanı (x - y düzleminde) üzerinde a) meydana gelen normal ve kayma gerilmelerini gösteriniz, b) asal gerilmeleri ve doğrultularını bulunuz.

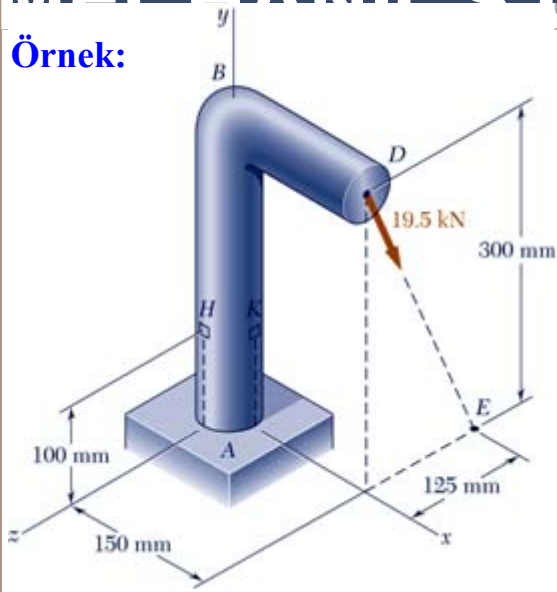


Örnek:

Dış çapı 300 mm olan şekildeki çelik boru 6 mm et kalınlığındaki bir saçın kaynatılmasıyla (22.5° lik helis açısıyla) üretilmiştir. $P=160$ kN ve $T= 800$ N.m için kaynağa paralel (teğet) ve dik doğrultulardaki gerilmeleri (kayma gerilmesi ve normal gerilme) bulunuz.



Örnek:

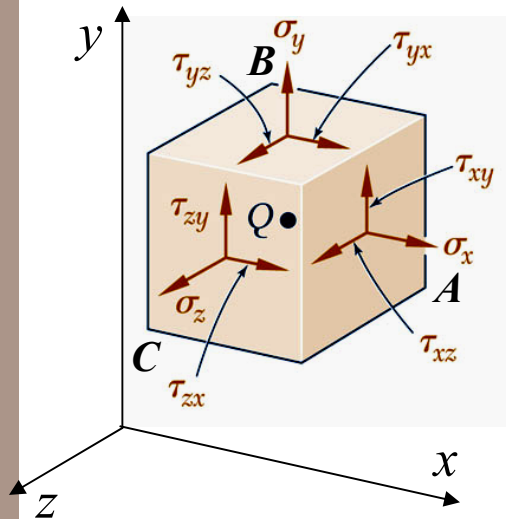


19.5 kN luk kuvvet D noktasında şekildeki gibi 60 mm çaplı dairesel kesitli dirseğe etkimektedir. Buna göre; H ve K noktalarındaki asal gerilmeleri ve maksimum kayma gerilmelerini bulunuz ve doğrultuları ile birlikte gösteriniz.

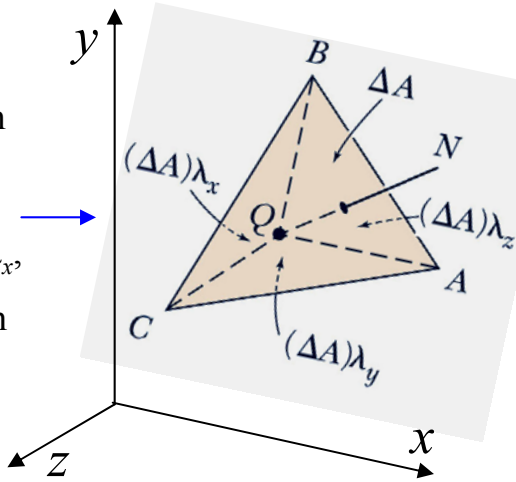


End

Genel gerilme durumunda dönüşüm bağıntıları ve Mohr Çemberi



ABC noktalarından geçen ve yüzey normali N olan (doğrultman kosinüsleri $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$) bir düzlemde kesim yapılırsa:



α, β ve γ yüzey normalinin (N) sırasıyla x, y ve z eksenleriyle yaptığı açılar olmak üzere:
 $\lambda_x = \cos \alpha, \lambda_y = \cos \beta, \lambda_z = \cos \gamma$

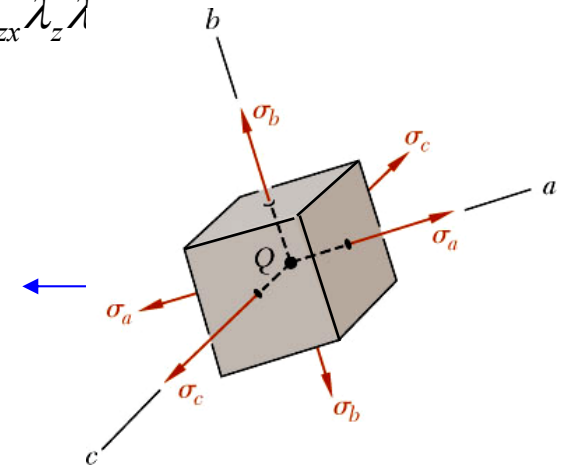
Statik dengeden $\sum F_n = 0$

Herhangi bir N doğrultusundaki normal gerilme (not: kayma gerilmeleri de benzer şekilde bulunabilir)

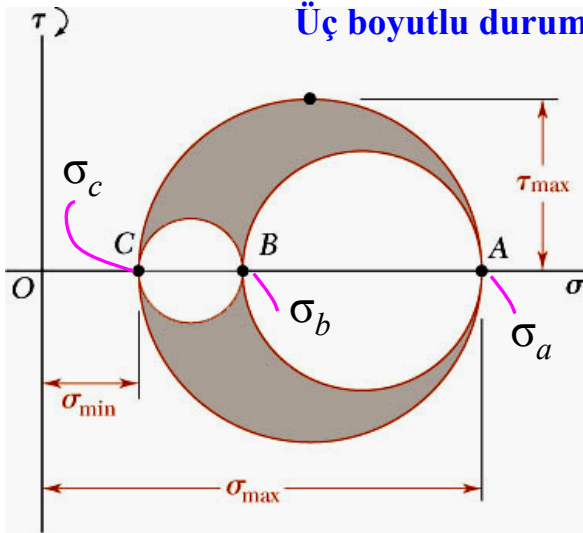
$$\sigma_n = \sigma_x \lambda_x^2 + \sigma_y \lambda_y^2 + \sigma_z \lambda_z^2 + 2\tau_{xy} \lambda_x \lambda_y + 2\tau_{yz} \lambda_y \lambda_z + 2\tau_{zx} \lambda_z \lambda_x$$

3 boyutlu kübik gerilme elemanına etkiyen kuvvetler sadece normal gerilme/asal gerilme ise (yani kayma gerilmeleri yoksa):

$$\sigma_n = \sigma_a \lambda_a^2 + \sigma_b \lambda_b^2 + \sigma_c \lambda_c^2$$



Üç boyutlu durum için Mohr Çemberi:

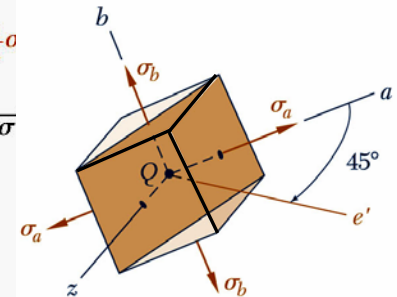
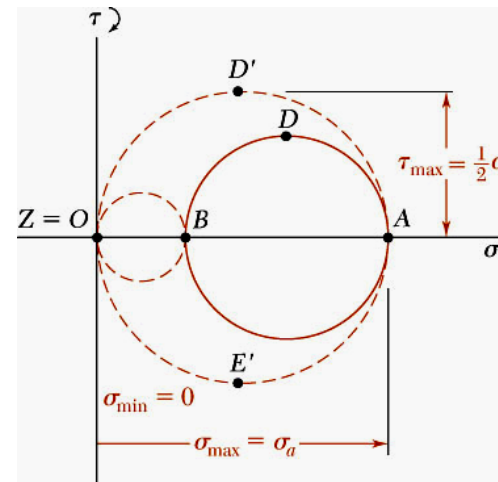
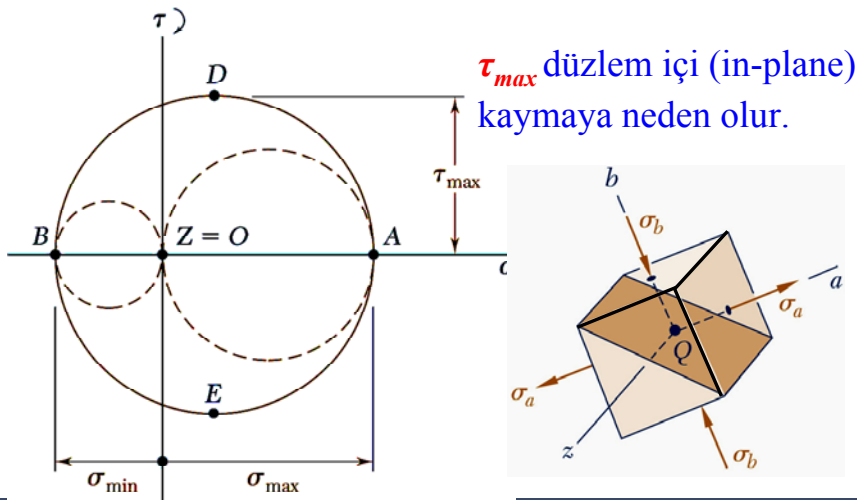


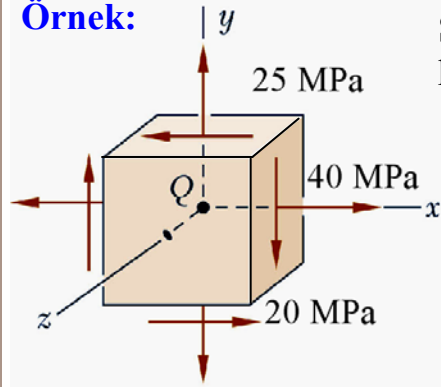
Her bir daire/çember; kübik gerilme elemanının asal gerilme eksenleri etrafında döndürülmesiyle oluşan normal ve kayma gerilmelerini göstermektedir. Yani, şekildeki BC çemberi a etrafındaki bir dönmeye, AC çemberi b etrafındaki bir dönmeye, AB çemberi c etrafındaki bir dönmeye karşılık gelmektedir.

En büyük kayma gerilmesi büyük çemberin yarıçapına karşılık gelmektedir:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} |\sigma_{\max} - \sigma_{\min}|$$

Not: Daha önce düzlem gerilme durumunda 2 asal gerilme hesaplanmıştı. Ancak gerçekte değeri “0” da olsa üçüncü bir asal gerilme de vardır. Mohr çemberleri buna göre oluşturulabilir. Özellikle düzlem durum için bulunan σ_{\max} ve σ_{\min} değerlerinin *ikisi de pozitif veya ikisi de negatif ise*; üçüncü gerilmenin “0” olarak göz önüne alınması son derece önemlidir. Çünkü maksimum *kayma gerilmesi* değeri ve *kayma düzlemi* değişmektedir.



Örnek:

Şekildeki düzlem gerilme durumu için (a) asal gerilmeleri ve doğrultularını, (b) maksimum kayma gerilmelerini bulunuz.



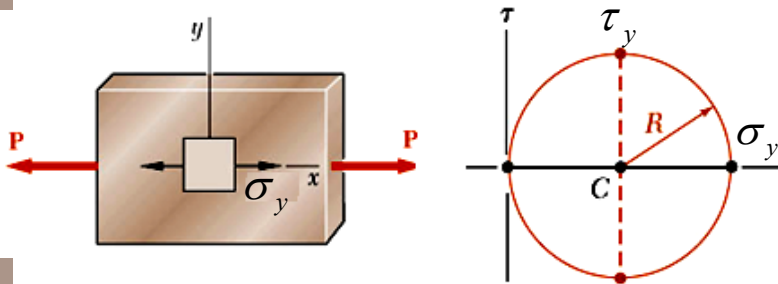
Akma ve Kırılma Kriterleri (Düzlem Gerilme)

Eksenel olmayan yüklere maruz makina parçalarında hasarın meydana gelip gelmeyeceğini tahmin etmek için çeşitli teoriler geliştirilmiştir. Bu teorilerde genellikle, asal gerilme bileşenleri göz önüne alınarak eşdeğer bir gerilme değeri bulunmakta ve bu değer eksenel yüklemdeki akma veya kırılma mukavemet değerleri ile karşılaştırılmaktadır.

1- Sünek Malzemeler için Akma Kriterleri

• Maksimum Kayma Gerilmesi Kriteri (Tresca Kriteri):

(Maximum Shearing Stress Criterion, Fransız mühendis Henri Edouard Tresca, 1814-1885)

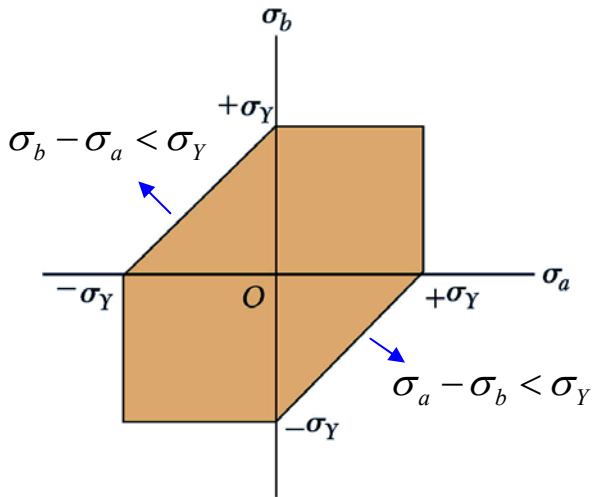


Tek eksenli yükleme durumu

Bu kriter gere; çok eksenli durumdaki maksimum kayma gerilmesi, deneysel olarak elde edilen tek eksenli durumdaki kayma akma gerilmesine ulaştığında malzemede akma başlar.

Emniyetli sınırlar içinde kalmak için $\tau_{max} < \tau_Y$,

yani
$$\tau_{max} = \frac{|\sigma_{max} - \sigma_{min}|}{2} < \frac{\sigma_Y}{2}$$
 olmalıdır.



Asal gerilmeler (σ_a ve σ_b) aynı işarete sahipse: $\tau_{max} = \frac{|\sigma_a|}{2}$ or $\frac{|\sigma_b|}{2} < \frac{\sigma_Y}{2}$

Asal gerilmeler (σ_a ve σ_b) zıt işaretli ise: $\tau_{max} = \frac{|\sigma_a - \sigma_b|}{2} < \frac{\sigma_Y}{2}$

• Çarpılma Şekil Değiştirme Enerjisi Kriteri (Von Mises Kriteri):

(Maximum Distortion Energy Criterion, uygulamalı matematikçi Richard von Mises, 1883-1953)

Bu kriteri göre; birim hacim için, çok eksenli durumdaki çarpılma şekil değiştirme enerjisi, deneysel olarak elde edilen tek eksenli durumdaki çarpılma şekil değiştirme enerjisine ulaştığında malzemede akma başlar. Kriter asal gerilmeler cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilir.

Birim hacim için kullanılan şekil değiştirme enerjisi bağıntısı daha sonra çıkarılacaktır.

Akma olmaması için $u_d < u_Y$ olmalıdır:

$$\frac{1}{6G}(\sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2) < \frac{1}{6G}(\sigma_Y^2 - \sigma_Y \times 0 + 0^2)$$

$$\sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2 < \sigma_Y^2 \rightarrow \text{elips denklemi}$$

Von Mises Kriterlerindeki elips Tresca kriteri ile oluşturulan altıgenin köşelerinden geçmektedir. Her iki kriter birbirlerine çok yakın sonuçlar vermektedir. Her iki kriterde altıgen ile elips içinde kalan noktalar emniyetli gerilme değerlerini vermektedir. Von mises kriteri gerçekte daha doğru sonuçlar vermektedir. Buna karşılık Tresca kriterine göre yapılacak bir tasarımda emniyet katsayısı daha yüksek alınmış olur.

Sadece burulmaya maruz bir dairesel kesitli bir milde:

$$\sigma_{max} = \sigma_a = \tau$$

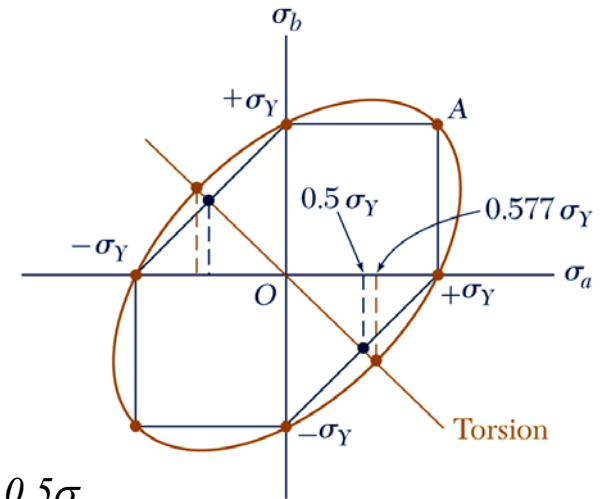
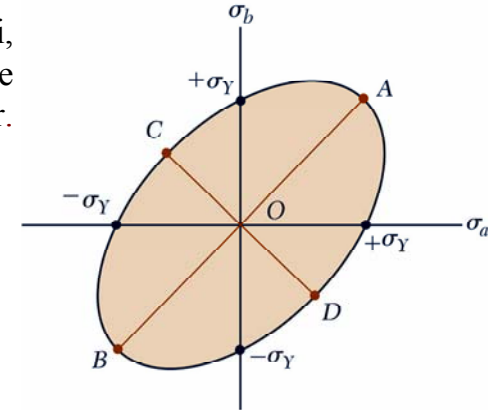
$$\sigma_{min} = \sigma_b = -\tau$$

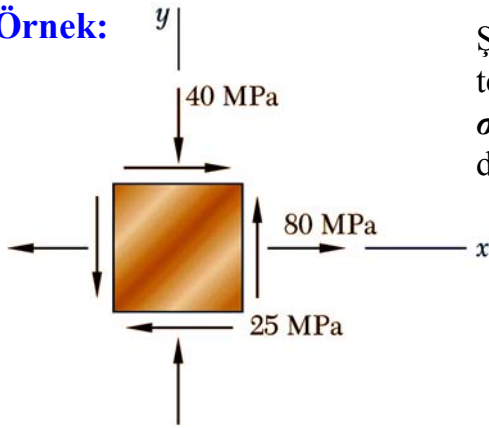
Tresca:

$$\sigma_a - \sigma_b < \sigma_Y \rightarrow \tau - (-\tau) < \sigma_Y \rightarrow \tau < \frac{\sigma_Y}{2} = 0.5\sigma_Y$$

Von Mises:

$$\sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2 < \sigma_Y^2 \rightarrow \tau^2 - \tau(-\tau) + (-\tau)^2 < \sigma_Y^2 \rightarrow \tau = 0.577\sigma_Y$$

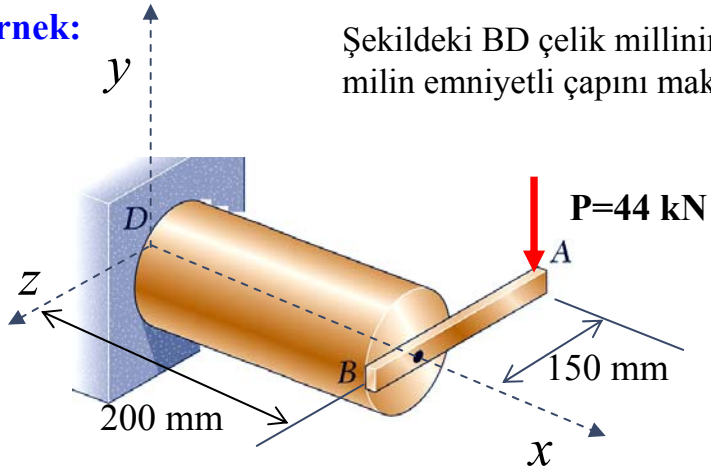


Örnek:

Şekildeki düzlem gerilme durumu, bir makina parçasının kritik bir noktasındaki gerilmeleri temsil etmektedir. Söz konusu çelik parçanın aksenal yüklemedeki akma gerilme değeri $\sigma_y = 250 \text{ MPa}$ olduğuna göre, Tresca ve von Mises kriterlerine göre parçanın mevcut gerilme durumu için emniyet katsayısını bulunuz.

Örnek:

Şekildeki BD çelik millinin akma gerilme değeri $\sigma_y = 276$ MPa'dır. Emniyet katsayısını $n=2$ alarak, milin emniyetli çapını maksimum kayma gerilmesi kriterine göre (Tresca) bulunuz.

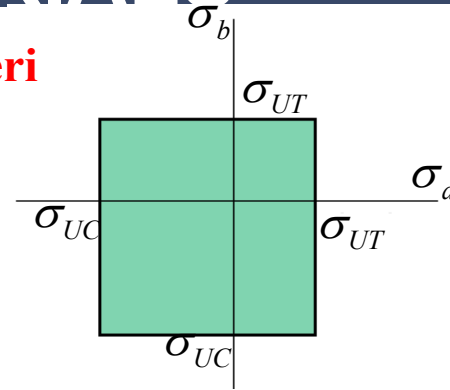


End

2- Gevrek Malzemeler için Kırılma Kriterleri

• Maksimum Normal Gerilme Kriteri:

Bu kritere göre; çok eksenli durumdaki maksimum normal gerilme değeri, malzemenin deneysel olarak elde edilmiş tek eksenli durumdaki kırılma değerine ulaştığında kırılma/hasar meydana gelir.

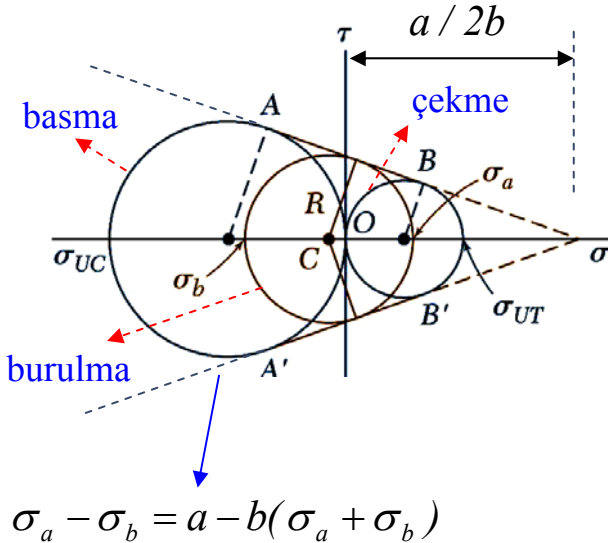


emniyet için
 $-\sigma_{UC} < \{\sigma_a, \sigma_b\} < \sigma_{UT}$
 olmalıdır.

• İç Sürtünme Teorisi -Coulomb Kriteri:

Bu kritere göre; malzemenin hasara uğramasında maksimum gerilme ile beraber iç sürtünme kuvvetleri de etkilidir. Gevrek malzemelerin çeki ve basıdaki mukavemet değerleri de (malzeme içindeki süreksiz noktalar ve malzeme kusurları nedeniyle, micro kırıklar gibi) birbirinden farklıdır.

Kriteri ifade eden aşağıdaki bağıntıda **a** ve **b** sırasıyla maksimum kayma gerilmesini ve iç sürtünmeleri karakterize eden parametrelerdir. Bu katsayılar basit çekme ve basma testleri ile bulunur.



$$\sigma_a - \sigma_b = a - b(\sigma_a + \sigma_b) \quad \dots(1)$$

Sadece **çekme** durumunda:

$$\sigma_a = \sigma_{UT} \quad , \quad \sigma_b = 0$$

$$\sigma_{UT} - 0 = a - b(\sigma_{UT} + 0)$$

$$\sigma_{UT} = a - b\sigma_{UT} \quad \dots(2)$$

Sadece **basma** durumunda:

$$\sigma_a = 0 \quad , \quad \sigma_b = -\sigma_{UC}$$

$$0 - (-\sigma_{UC}) = a - b(0 - \sigma_{UC})$$

$$\sigma_{UC} = a + b\sigma_{UC} \quad \dots(3)$$

(2) ve (3) nolu denklemlerden

$$\sigma_{UC} = (\sigma_{UT} + b\sigma_{UT}) + b\sigma_{UC}$$

$$a = \frac{\sigma_{UC} - \sigma_{UT}}{\sigma_{UC} + \sigma_{UT}}$$

$$b = \frac{-\sigma_{UT} \cdot \sigma_{UC}}{\sigma_{UC} + \sigma_{UT}}$$

a ve b ifadeleri (1) nolu denklemde yerine yazılırsa, hasar olmaması için;

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{UT}} - \frac{\sigma_b}{\sigma_{UC}} \leq 1$$

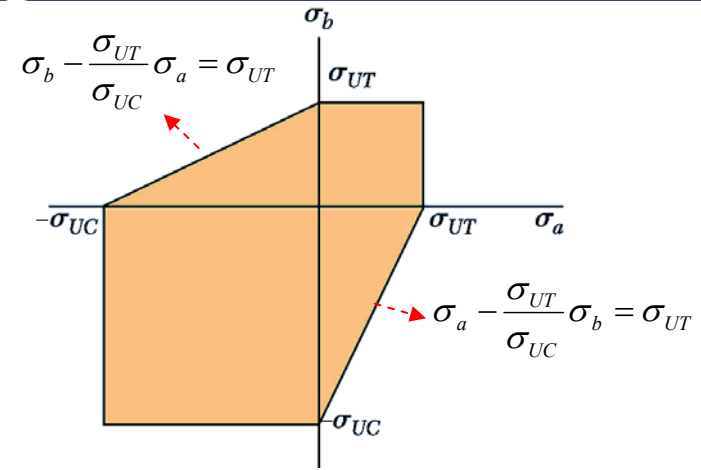
olmalıdır.

Not: bu bağıntı çıkarılırken σ_{UT} ve σ_{UC} işaretleriyle beraber (+ ve -)

kullanıldı. Bu nedenle bağıntıda mutlak değer olarak yazılmalıdır. Yani her ikisi de + olarak yerlerine yazılmalıdır.

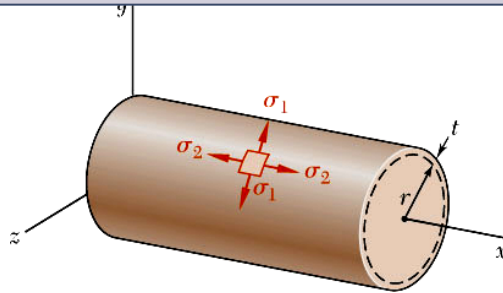
Örnek:

Dökme demirden imal edilmiş şekildeki kolun çekme ve basmadaki mukavemet değerleri sırasıyla $\sigma_{UT}=180$ MPa ve $\sigma_{UC}=300$ MPa 'dır. Emniyet katsayısını $n=3$ olduğuna göre, milin OA kısmının çapı için emniyet kontrolü yapınız.



İçten basınca maruz ince cidarlı kaplarda gerilmeler (düzlem gerilme)

P iç basıncına maruz iki ucu kapalı, ince cidarlı ($r \gg t$) silindirde gerilmeler



σ_1 = teğetsel gerilme, σ_2 = aksel gerilme

Burada σ_1 ve σ_2 aynı zamansa asal gerilmeleridir. Çünkü kayma gerilmesi yok.

• Teğetsel Gerilme

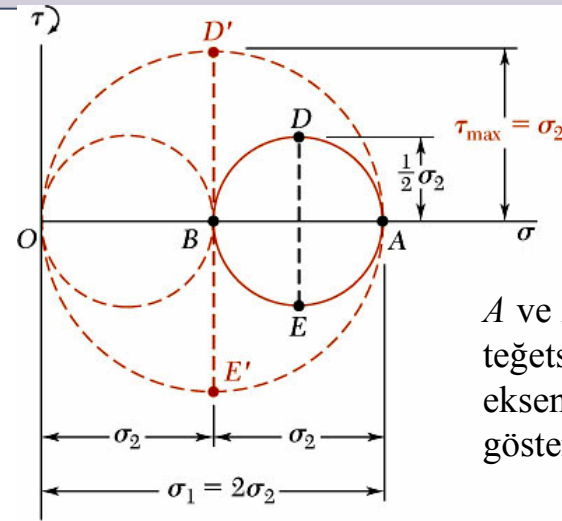
$$\sum F_z = 0 = \sigma_1(2t \Delta x) - p(2r \Delta x)$$

$$\sigma_1 = \frac{pr}{t}$$

• Aksel Gerilme

$$\sum F_x = 0 = \sigma_2(2\pi r t) - p(\pi r^2)$$

$$\sigma_2 = \frac{pr}{2t} \quad \sigma_1 = 2\sigma_2$$



A ve B noktaları sırasıyla teğetsel gerilmeyi (σ_1) ve aksel gerilmeyi (σ_2) göstermektedir.

Maksimum düzlem içi (in-plane) kayma gerilmesi:

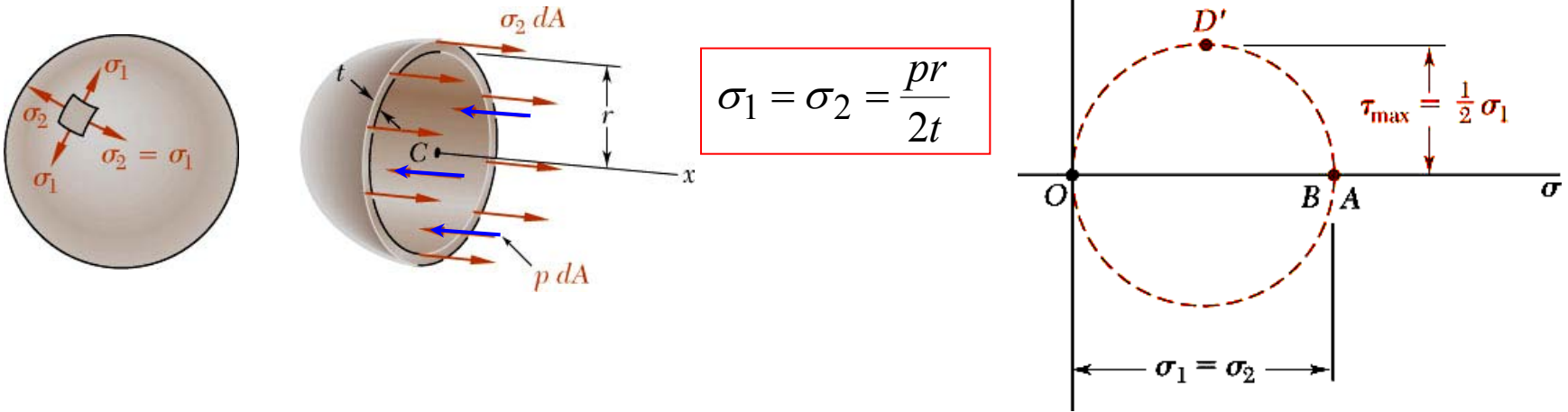
$$\tau_{\max(\text{in-plane})} = \frac{1}{2}\sigma_2 = \frac{pr}{4t}$$

Düzlem dışı (out-of-plane) maksimum kayma gerilmesi:

$$\tau_{\max} = \sigma_2 = \frac{pr}{2t}$$

Emniyet kontrolünde veya tasarımda göz önüne alınması gereken kayma gerilme

P iç basıncına maruz ince cidarlı ($r \gg t$) küresel kaplarda gerilmeler

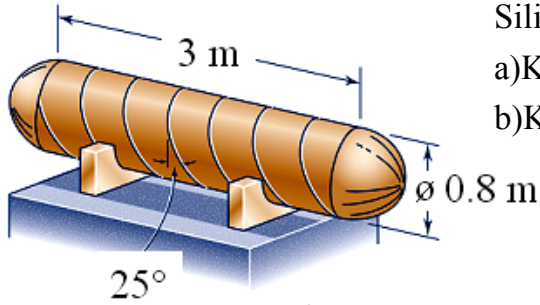


Burada σ_1 ve σ_2 aynı zamansa asal gerilmeleridir. Çünkü kayma gerilmesi yok. Her ikisi de Mohr çemberinde aynı noktayı gösterir. Bu nedenle; $\tau_{\max(in-plane)} = 0$

Üçüncü asal gerilme “0” olduğundan; maksimum kayma gerilmesi;

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sigma_1 = \frac{pr}{4t}$$

Örnek:



1.2 MPa'lık iç basınca maruz bir hava tankı silindirik ve küresel kısımlardan oluşmaktadır. Silindirik kısmın et kalınlığı 10 mm küresel kısmın et kalınlığı 8 mm ise;

- Küresel ve silindirik kısımlarda meydana gelen maksimum normal ve kayma gerilmelerini
- Kaynak dikişinde meydana gelen normal ve kayma gerilmelerini bulunuz.

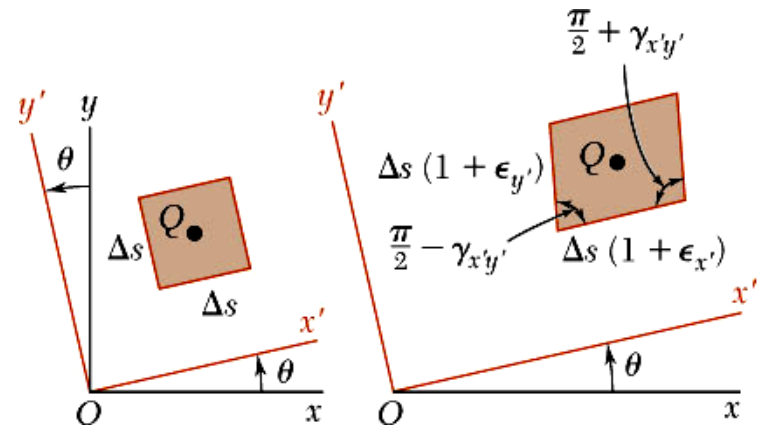
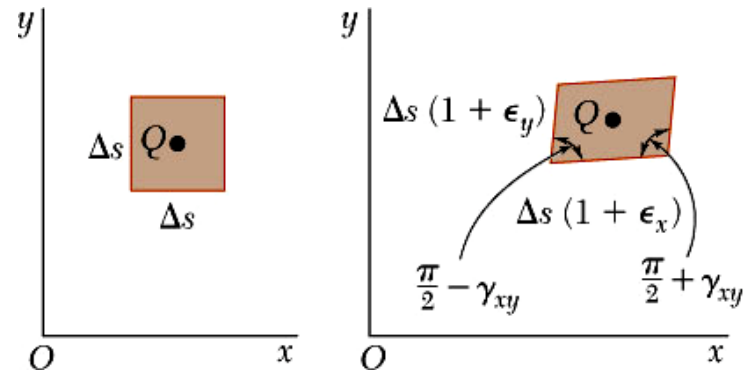
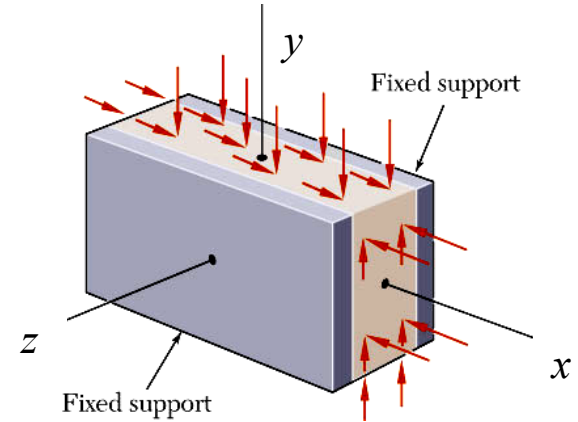
Düzlem şekil değiştirme ve dönüşüm bağıntıları

Düzlem şekil değiştirme durumunda:

$$\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$$

$$(\epsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0)$$

Gerilme dönüşüm bağıntıları ile şekil değiştirme dönüşüm bağıntıları arasında benzeşim vardır. Gerilme dönüşüm bağıntılarında σ yerine ϵ ve τ yerine $\gamma/2$ yazılarak dönüşüm bağıntıları elde edilebilir.



$$\sigma \rightarrow \epsilon \quad \tau \rightarrow \frac{\gamma}{2}$$

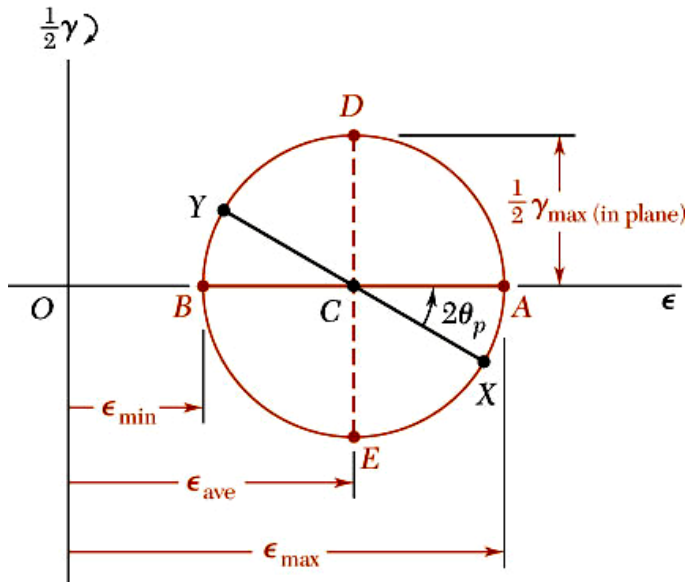
$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta$$

$$\epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta$$

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta$$

$$\epsilon_{x'} + \epsilon_{y'} = \epsilon_x + \epsilon_y$$

Düzlem şekil değiştirmede Mohr Çemberi



$$\epsilon_{ort} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2}; \quad R = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

Asal birim şekil değiştirmeler ve doğrultuları

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y}$$

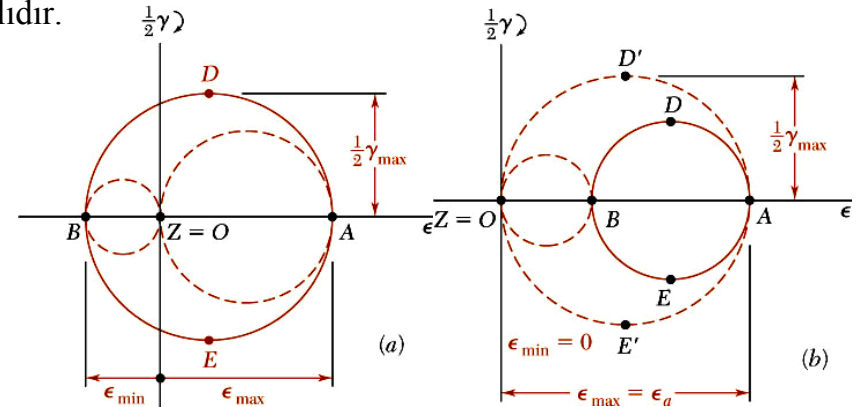
$$\epsilon_{max} = \epsilon_{ave} + R; \quad \epsilon_{min} = \epsilon_{ave} - R$$

Düzlem içi maksimum kayma birim şekil değiştirmesi

$$\gamma_{max} = 2R = \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}$$

Asal gerilme düzlemleri ile asal şekil değiştirme düzlemleri ve doğrultuları aynıdır. Çünkü kayma gerilmeleri ve dolayısıyla kayma şekil değiştirmeleri yoktur (Hooke bağıntıları).

Düzlem şekil değiştirme durumunda asal gerilmelerin üçüncüsü gerilmeye olduğu gibi “0”dır. Bu durum göz önüne alınarak Mohr çemberi çizilmeli ve maksimum kayma birim şekil değiştirmesi bulunmalıdır.



Düzlem gerilme durumu için asal şekil değiştirmeler:

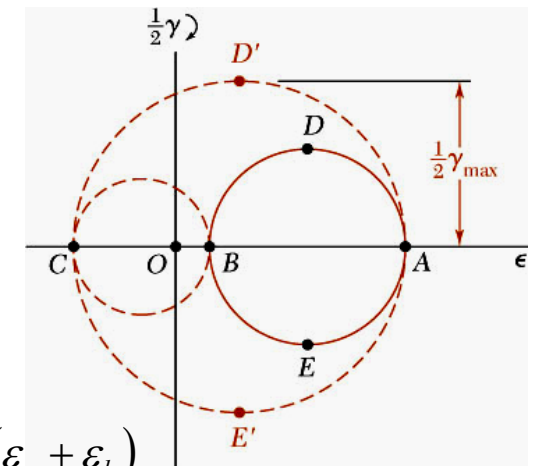
σ_a ve σ_b asal gerilmeler

$\sigma_c = 0$ ise de $\epsilon_c \neq 0$;

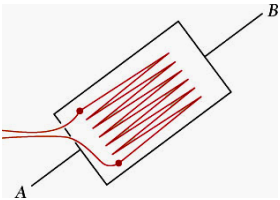
$$\epsilon_a = \frac{\sigma_a}{E} - \frac{\nu \sigma_b}{E}$$

$$\epsilon_b = -\frac{\nu \sigma_a}{E} + \frac{\sigma_b}{E}$$

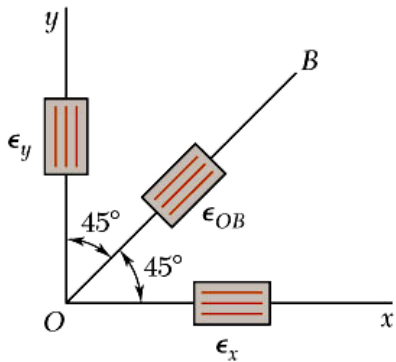
$$\epsilon_c = -\frac{\nu}{E}(\sigma_a + \sigma_b) = -\frac{\nu}{1-\nu}(\epsilon_a + \epsilon_b)$$



Deformasyon Rozetleri: Strain-Gages



- Strain gages birim şekil değiştirme ölçümünde kullanılan dirençlerdir.
- 45° lik bir rozet ile ϵ_x ve ϵ_y doğrudan , γ_{xy} ise dolaylı olarak ölçülmüş olur:

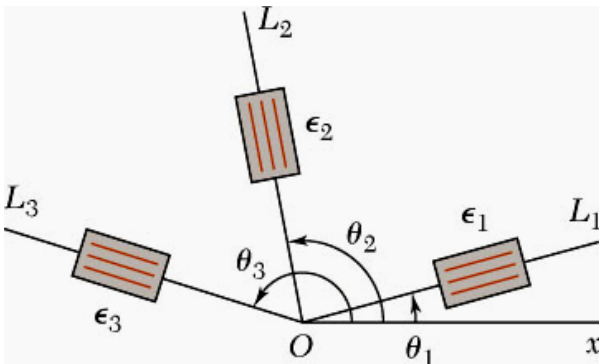


$$\epsilon(\theta) = \epsilon_x \cos^2 \theta + \epsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$\epsilon_{OB} = \epsilon(45^\circ) = \frac{1}{2}(\epsilon_x + \epsilon_y + \gamma_{xy})$$

$$\gamma_{xy} = 2\epsilon_{OB} - (\epsilon_x + \epsilon_y)$$

- Aralarında herhangi bir açı bulunan rozetler kullanılırsa, **x-y** düzlemindeki normal ve kayma birim şekil değiştirmeleri 3 bilinmeyenli 3 denklem kullanılarak bulunur. Burada ϵ_1 , ϵ_2 ve ϵ_3 strain gages'lerden deneysel olarak elde edilen değerlerdir.



$$\epsilon_1 = \epsilon_x \cos^2 \theta_1 + \epsilon_y \sin^2 \theta_1 + \gamma_{xy} \sin \theta_1 \cos \theta_1$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_x \cos^2 \theta_2 + \epsilon_y \sin^2 \theta_2 + \gamma_{xy} \sin \theta_2 \cos \theta_2$$

$$\epsilon_3 = \epsilon_x \cos^2 \theta_3 + \epsilon_y \sin^2 \theta_3 + \gamma_{xy} \sin \theta_3 \cos \theta_3$$

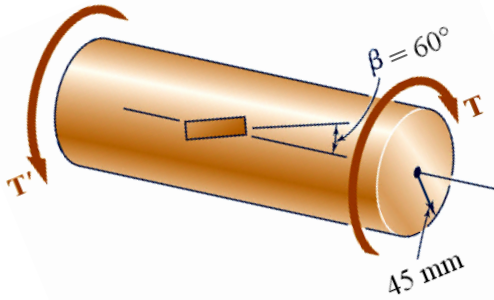
Örnek:

Bir makina parçasının serbest yüzeyindeki bir noktadan strain gage ler ile yapılan ölçümlerden yararlanılarak asal şekil değiştirmeler $\epsilon_a=+400 \mu$ ve $\epsilon_b=-50 \mu$ olarak hesaplanmıştır. Ölçüm yapılan malzemenin Poisson oranı $\nu=0.3$ olduğuna göre; a) maksimum düzlem-içi birim kayma deformasyonunu, b) gerçek maksimum birim kayma deformasyonunu bulunuz ($E=200 \text{ GPa}$).



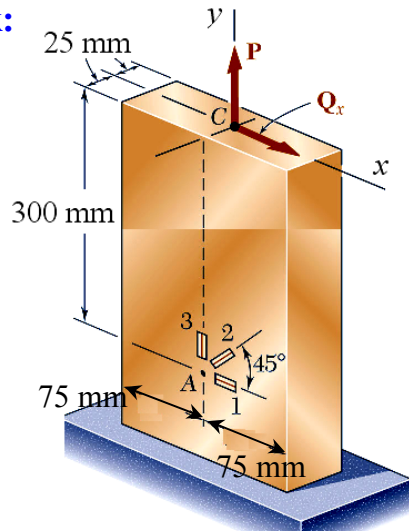
Örnek:

T burulma momentine maruz şekildeki içi dolu mile yapıştırılan bir strain gage'den $\epsilon = +250 \mu$ değeri okunmuştur. $G = 75 \text{ GPa}$ olduğuna göre T'nin değerini bulunuz.



End

Örnek:

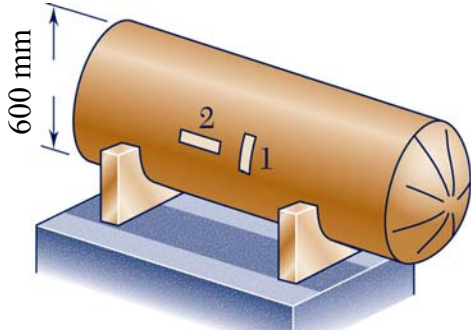


Şekildeki yükleme durumu için A noktasından okunan strain gage değerleri $\varepsilon_1 = -60 \mu$, $\varepsilon_2 = +240 \mu$, ve $\varepsilon_3 = +200 \mu$ olarak okunmuştur. $E = 200 \text{ GPa}$, $G = 79 \text{ GPa}$ ve $\nu = 0.3$ olduğuna göre, uygulanan P ve Q kuvvetlerini bulunuz.



End

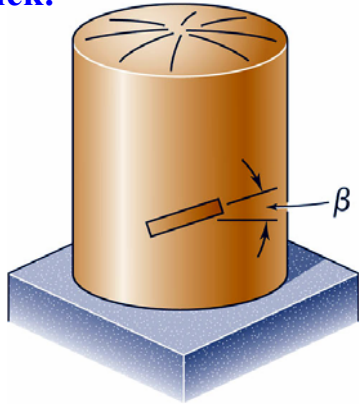
Örnek:



Basınçlı gaz taşımada kullanılan 600 mm çapındaki ve 20 mm et kalınlığındaki bir tankın yüzeyindeki bir noktaya şekildeki gibi boyuna ve enine yapıştırılan strain gage'lerden $\varepsilon_1 = +255 \mu$ ve $\varepsilon_2 = +60$ değerleri okunmuştur. $G = 80$ GPa olduğuna göre, a) tank içindeki basıncı ve b) tankın cidarındaki asal gerilmeleri ve maksimum kayma gerilmesini bulunuz.



Örnek:



600 mm \varnothing ındaki ve 6 mm et kalınlığındaki silindirik bir tankın ($E=200$ GPa, $\nu=0.3$) iç basıncını ölçmek için; tankın yüzeyine yatayla $\beta=18^\circ$ lik açı yapacak şekilde bir strain gage yapıştırılmıştır. Strain gage'den okunan değer $\epsilon=280 \mu$ olduğuna göre, tankın iç basıncını bulunuz.



End